

Câu 1 (2,0 điểm). Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x + 2m^2 - 3m + 1 = 0$, trong đó m là tham số, x là ẩn số.

- Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có nghiệm.
- Giả sử phương trình đã cho có hai nghiệm là x_1, x_2 . Chứng minh rằng $|x_1 + x_2 + x_1x_2| \leq \frac{9}{8}$.

Câu 2 (2,0 điểm). Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2 - xy = 1 \\ 4x^2 + 4xy - y^2 = m \end{cases}$, trong đó m là tham số và x, y là các ẩn số.

- Giải hệ phương trình với $m = 7$.
- Tìm tất cả các giá trị của m để hệ phương trình có nghiệm.

Câu 3 (3,0 điểm). Cho hình thang $ABCD$ với AD, BC là hai cạnh đáy, $BC > AD$, $BC = BD = 1$, $AB = AC$, $CD < 1$, $\widehat{BAC} + \widehat{BDC} = 180^\circ$, E là điểm đối xứng với D qua đường thẳng BC .

- Chứng minh rằng 4 điểm A, C, E, B cùng nằm trên một đường tròn và $\widehat{BEC} = 2\widehat{AEC}$.
- Đường thẳng AB cắt đường thẳng CD tại điểm K , đường thẳng BC cắt đường thẳng AE tại điểm F . Chứng minh rằng $FA = FD$ và đường thẳng FD tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác ADK .
- Tính độ dài cạnh CD .

Câu 4 (2,0 điểm). Cho phương trình $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$ (1). Mỗi bộ số (x, y, z) trong đó x, y, z là các số nguyên dương thỏa mãn (1) được gọi là một nghiệm nguyên dương của phương trình (1).

- Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương có dạng (x, y, y) của phương trình (1).
- Chứng minh rằng tồn tại nghiệm nguyên dương (a, b, c) của phương trình (1) và thỏa mãn điều kiện $\min\{a; b; c\} > 2017$. Trong đó kí hiệu $\min\{a; b; c\}$ là số nhỏ nhất trong ba số a, b, c .

Câu 5 (1,0 điểm). Cho số tự nhiên $n > 1$ và $n+2$ số nguyên dương $a_1, a_2, \dots, a_{n+2}$ thỏa mãn điều kiện $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{n+2} \leq 3n$. Chứng minh rằng tồn tại hai số a_i, a_j ($1 \leq j < i \leq n+2; i, j \in \mathbb{N}$) sao cho $n < a_i - a_j < 2n$.

---Hết---

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh Số báo danh

Câu 1 (2,0 điểm). Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x + 2m^2 - 3m + 1 = 0$, trong đó m là tham số, x là ẩn số.

Nội dung	Điểm
1a) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có nghiệm.	1,00
PT có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' = (m-1)^2 - (2m^2 - 3m + 1) \geq 0$	0,25
$\Leftrightarrow m^2 - m \leq 0 \Leftrightarrow m(m-1) \leq 0$	0,25
$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m-1 < 0 \\ m < 0 \\ m-1 > 0 \\ m = 0 \\ m = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq m \leq 1 \\ m \leq 0 \\ m \geq 1 \end{cases}$	0,25
$\Leftrightarrow 0 \leq m \leq 1$	0,25
1b) Giả sử phương trình đã cho có hai nghiệm là x_1, x_2. Chứng minh rằng $ x_1 + x_2 + x_1 x_2 \leq \frac{9}{8}$.	1,00
Theo Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) \\ x_1 \cdot x_2 = 2m^2 - 3m + 1 \end{cases}$	0,25
$\Rightarrow P = x_1 + x_2 + x_1 \cdot x_2 = 2m^2 - m - 1 = 2 \left \left(m - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} \right $	0,25
Có $0 \leq m \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \leq m - \frac{1}{4} \leq \frac{3}{4} \Rightarrow \left(m - \frac{1}{4}\right)^2 \leq \frac{9}{16}$	0,25
Suy ra $P = 2 \left(\frac{9}{16} - \left(m - \frac{1}{4}\right)^2 \right) \leq \frac{9}{8}$, dấu bằng xảy ra khi $m = \frac{1}{4}$.	0,25

Câu 2 (2,0 điểm). Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2 - xy = 1 \\ 4x^2 + 4xy - y^2 = m \end{cases}$, trong đó m là tham số và x, y là các ẩn số.

Nội dung	Điểm
2a) Giải hệ phương trình với $m = 7$.	1,00
Với $m=7$ ta có: $\begin{cases} 2x^2 - xy = 1 \\ 4x^2 + 4xy - y^2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x^2 - 1}{x} = y \\ 4x^2 + 4xy - y^2 = 7 \end{cases}$ (do $x = 0$ không thỏa mãn).	0,25
$\Rightarrow 4x^2 + 4x \frac{2x^2 - 1}{x} - \left(\frac{2x^2 - 1}{x} \right)^2 = 7$	0,25

$\Leftrightarrow 4x^4 + 4x^2(2x^2 - 1) - (2x^2 - 1)^2 = 7x^2 \Leftrightarrow 8x^4 - 7x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)\left(x^2 + \frac{1}{8}\right) = 0$	0,25
$\Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Với $x = 1 \Rightarrow y = 1$. Với $x = -1 \Rightarrow y = -1$. Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(x; y) = (-1; -1), (1; 1)$.	0,25
2b) Tìm tất cả các giá trị của m để hệ phương trình có nghiệm.	1,00
Ta có $x = 0$ không thỏa mãn suy ra $x \neq 0$. Rút y từ PT thứ nhất rồi thế vào PT thứ hai ta có: $4x^2 + 4x \frac{2x^2 - 1}{x} - \left(\frac{2x^2 - 1}{x}\right)^2 = m$	0,25
Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow 4x^4 + 4x^2(2x^2 - 1) - (2x^2 - 1)^2 = mx^2$ có nghiệm khác 0.	0,25
$\Leftrightarrow 8x^4 - mx^2 - 1 = 0$ có nghiệm khác 0. Đặt $t = x^2, t \geq 0$. Thay vào phương trình trên ta được $8t^2 - mt - 1 = 0$ (1). Như vậy yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ (1) có nghiệm dương.	0,25
Dễ thấy phương trình (1) luôn có 2 nghiệm trái dấu do $ac < 0$ suy ra (1) luôn có một nghiệm dương. Do đó với mọi số thực m hệ phương trình luôn có nghiệm.	0,25

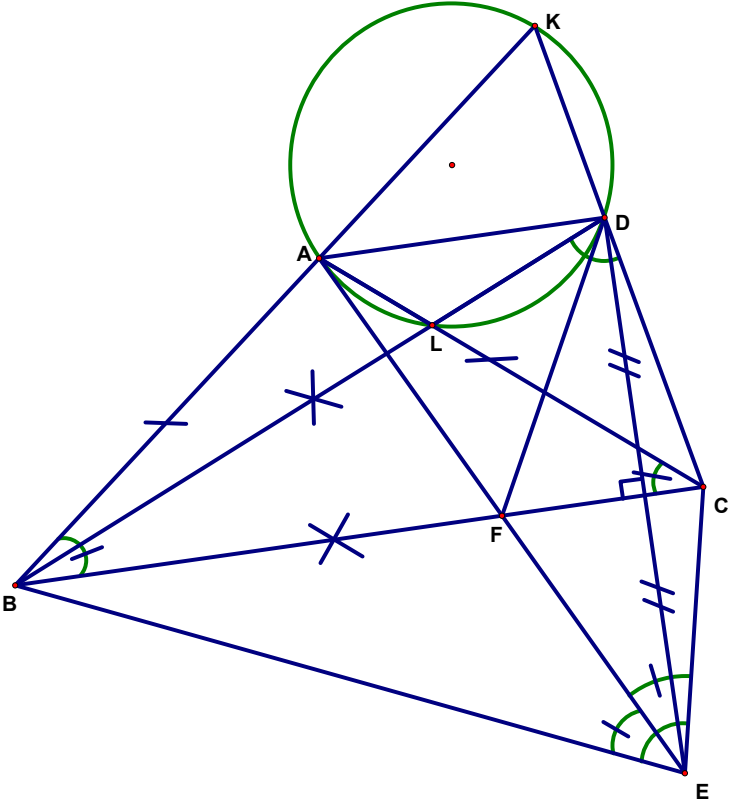
Câu 3 (3,0 điểm). Cho hình thang $ABCD$ thỏa mãn AD, BC là hai đáy, $BC > AD$, $BC = BD = 1$, $AB = AC$, $CD < 1$, $\widehat{BAC} + \widehat{BDC} = 180^\circ$, E là điểm đối xứng với D qua đường thẳng BC .

a) Chứng minh rằng 4 điểm A, C, E, B cùng nằm trên một đường tròn và $\widehat{BEC} = 2\widehat{AEC}$.

b) Đường thẳng AB cắt đường thẳng CD tại điểm K , đường thẳng BC cắt đường thẳng AE tại điểm F . Chứng minh rằng $FA = FD$ và đường thẳng FD tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác ADK .

c) Tính độ dài cạnh CD .

Nội dung	Điểm
----------	------

	
3a) Chứng minh rằng 4 điểm A, C, E, B cùng nằm trên một đường tròn và $\widehat{BEC} = 2.\widehat{AEC}$.	1,00
Do E đối xứng D qua BC nên $\widehat{BDC} = \widehat{BEC}$	0,25
Có $\widehat{BAC} + \widehat{BDC} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BAC} + \widehat{BEC} = 180^\circ$ suy ra A, C, E, B cùng nằm trên một đường tròn.	0,25
Có tam giác ABC cân tại A nên $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$, kết hợp với tứ giác $ACEB$ nội tiếp ta được $\widehat{ABC} = \widehat{AEC}, \widehat{ACB} = \widehat{BEA}$.	0,25
Từ đó suy ra $\widehat{AEC} = \widehat{BEA} \Rightarrow \widehat{BEC} = 2.\widehat{AEC}$.	0,25
3b) Đường thẳng AB cắt đường thẳng CD tại điểm K, đường thẳng BC cắt đường thẳng AE tại điểm F. Chứng minh rằng $FA = FD$ và đường thẳng FD tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác ADK.	1,00
Có: $DE \perp BC, AD \parallel BC \Rightarrow \triangle ADE$ vuông tại D và $FD = FE = FA$.	0,25
Mặt khác $\widehat{BAC} + \widehat{BDC} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{BDK} \Rightarrow$ tứ giác $AKDL$ nội tiếp.	0,25
Có $\widehat{ADB} = \widehat{DBC}$ (do $AD \parallel BC$), tứ giác $ACEB$ nội tiếp suy ra $\widehat{CAE} = \widehat{CBE}$, do BC là trung trực của BE nên $\widehat{DBC} = \widehat{CBE}$. Do đó $\widehat{ADB} = \widehat{CAE}$ suy ra	0,25
FA là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADK , kết hợp với $FA = FD \Rightarrow FD$ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADK .	0,25
3c) Tính độ dài cạnh CD.	1,00
Do EF là phân giác $\widehat{BEC}$, suy ra $\frac{FC}{FB} = \frac{CE}{EB} = CE$ (vì $BE = BD = 1$) Ta có $\triangle AFC$ đồng dạng với $\triangle BFE \Rightarrow \frac{AC}{AF} = \frac{BE}{BF}$	0,25

Áp dụng định lý Ptolemy có: $AE.BC = AB.CE + AC.BE \Rightarrow 2AF = AC(1 + CE)$	0,25
$\Rightarrow \frac{2}{1 + CE} = \frac{AC}{AF} = \frac{BE}{BF} = \frac{BC}{BF} = \frac{BF + FC}{BF} = 1 + \frac{FC}{BF} = 1 + CE$	0,25
$\Rightarrow (1 + EC)^2 = 2 \Rightarrow 1 + EC = \sqrt{2}$ $\Rightarrow CD = EC = \sqrt{2} - 1.$	0.25

Câu 4 (2,0 điểm). Cho phương trình $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$ (1). Mỗi bộ số (x, y, z) trong đó x, y, z là các số nguyên dương thỏa mãn (1) được gọi là một nghiệm nguyên dương của phương trình (1).

Nội dung	Điểm
4a) Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương có dạng (x, y, y) của phương trình (1).	1,00
Giả sử phương trình có nghiệm nguyên dương là (x, y, y) . Khi đó thay vào phương trình ta được: $x^2 + y^2 + y^2 = 3xy^2 \Leftrightarrow x^2 + 2y^2 = 3xy^2$.	0,25
suy ra $x^2 : y^2 \Rightarrow x : y \Rightarrow x = ty$. Thay trở lại phương trình trên ta được $t^2 y^2 + 2y^2 = 3t.y.y^2 \Leftrightarrow t^2 + 2 = 3ty$.	0,25
Từ phương trình này ta được $2 : t \Rightarrow t \in \{1, 2\}$.	0,25
Với $t = 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow x = 1$. Với $t = 2 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow x = 2$. Do đó phương trình đã cho có hai nghiệm nguyên dương dạng (x, y, y) là: $(1, 1, 1), (2, 1, 1)$.	0,25
4b) Chứng minh rằng tồn tại nghiệm nguyên dương (a, b, c) của phương trình (1) và thỏa mãn điều kiện $\min\{a; b; c\} > 2017$. Trong đó kí hiệu $\min\{a; b; c\}$ là số nhỏ nhất trong ba số a, b, c.	1,00
Ta có $x = 1, y = 2, z = 5$ là một nghiệm của phương trình đã cho Giả sử $a = \min\{a; b; c\}$ với $a < b < c$ thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3abc$.	0,25
Xét phương trình: $(a + d)^2 + b^2 + c^2 = 3(a + d)bc \Rightarrow 2ad + d^2 = 3bcd$ $\Rightarrow d = 3bc - 2a \in \mathbb{N}^*$.	0,25
Suy ra phương trình (1) có nghiệm $(a'; b; c)$ với $a' = a + d$. Do $a < b < c$, suy ra $\min\{a'; b; c\} > \min\{a; b; c\} = a$.	0,25
Lặp lại quá trình trên sau không quá 2017 lần ta được $\min\{a; b; c\} > 2017$.	0,25

Câu 5 (1,0 điểm). Cho số tự nhiên $n > 1$ và số nguyên dương $a_1, a_2, \dots, a_{n+2}$ thỏa mãn điều kiện $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{n+2} \leq 3n$. Chứng minh rằng luôn tồn tại hai số a_i, a_j ($1 \leq j < i \leq n+2; i, j \in \mathbb{N}$) sao cho $n < a_i - a_j < 2n$.

Nội dung	Điểm
Với mọi k đặt $b_i = a_i + k \Rightarrow a_i - a_j = (a_i + k) - (a_j + k) = b_i - b_j$ (2). Do đó ta có thể chọn k sao cho $b_{n+2} = 3n$ và chuyển về xét dãy số $1 \leq b_1 < b_2 < \dots < b_{n+2} = 3n$. Khi đó ta chỉ cần chứng minh tồn tại hai số b_i, b_j ($1 \leq j < i \leq n+2; i, j \in \mathbb{N}$) sao cho $n < b_i - b_j < 2n$.	0,25
Xét 2 trường hợp: 1. Nếu tồn tại $j \in \{1, 2, \dots, n+1\}$ sao cho $n < b_j < 2n$ thì ta có: $n < b_{n+2} - b_j < 2n$	0,25
2. Nếu với mọi $j \in \{1, 2, \dots, n+1\}$ ta có $b_j \notin [n+1; 2n-1]$ thì các số $b_1, b_2, \dots, b_{n+1} \in \{1, 2, \dots, 3n-1\} \setminus \{n+1, \dots, 2n-1\}$. Các số thuộc tập $\{1, 2, \dots, 3n-1\} \setminus \{n+1, \dots, 2n-1\}$ chia thành n cặp số: $(1; 2n), (2; 2n+1), \dots, (n; 3n-1)$. Do đó	0,25
trong $n+1$ số $b_1, b_2, \dots, b_{n+1}$, tồn tại 2 số b_i, b_j ($j < i$) thuộc cùng một cặp, chẳng hạn $(t; 2n+t-1)$ hay $n < b_i - b_j = 2n+t-1-t = 2n-1 < 2n$. Theo (2) từ cặp số b_i, b_j thỏa mãn $n < b_i - b_j < 2n$ thì tồn tại cặp số a_i, a_j thỏa mãn $n < a_i - a_j < 2n$.	0,25

Lưu ý khi chấm bài:

- Hướng dẫn chấm (HDC) chỉ trình bày một cách giải bao gồm các ý bắt buộc phải có trong bài làm của học sinh. Khi chấm nếu học sinh bỏ qua bước nào thì không cho điểm bước đó.
- Nếu học sinh giải cách khác, giám khảo căn cứ các ý trong đáp án để cho điểm.
- Trong bài làm, nếu ở một bước nào đó bị sai thì các phần sau có sử dụng kết quả sai đó không được điểm.
- Bài hình học nếu không vẽ hình phần nào thì không cho điểm phần đó.
- Điểm toàn bài tính đến 0,25 và không làm tròn.

---Hết---