

Bài 1(2 điểm)

1. Giải phương trình $(x-1)(x+2)+2\sqrt{x^2+x+1}=0$

2. Cho x, y là các số thực dương . Chứng minh rằng $\left| \frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} \right| + \left| \frac{x+y}{2} + \sqrt{xy} \right| = |x| + |y|$

Đẳng thức trên còn đúng hay không nếu x, y là các số thực âm . Tại sao ?

Bài 2(2 điểm)

1. Giả sử n là số nguyên dương thỏa mãn điều kiện $n^2 + n + 3$ là số nguyên tố . Chứng minh rằng n chia 3 dư 1 và $7n^2 + 6n + 2017$ không phải số chính phương

2. Tìm tất cả các số nguyên x, y thỏa mãn phương trình $2x^2 + 4y^2 - 4xy + 2x + 1 = 2017$

Bài 3(2 điểm)

1. Cho đa thức $P(x) = x^3 - 6x^2 + 15x - 11$ và các số thực a, b thỏa mãn $P(a) = 1$, $P(b) = 5$. Tính giá trị của biểu thức $a+b$.

2. Giả sử x, y là các số thực dương thay đổi và thỏa mãn điều kiện

$x(xy+1) = 2y^2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $H = \frac{y^4}{1+y^2+y^4(x^4+x^2)}$

Bài 4(3 điểm)

1. Cho hai điểm A, B phân biệt nằm trong góc nhọn xOy sao cho $xOA = yOB$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên các tia Ox, Oy và P, Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của B lên các tia Ox, Oy . Giả sử M, N, P, Q đôi một phân biệt . Chứng minh rằng bốn điểm M, N, P, Q cùng thuộc một đường tròn

2. Cho tam giác ABC không cân , có ba góc nhọn . Một đường tròn đi qua B, C cắt các cạnh AC, AB lần lượt tại D, E . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BD, CE .

a. Chứng minh rằng các tam giác ABD, ACE đồng dạng với nhau và $MAB = NAC$

b. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên AB , K là hình chiếu vuông góc của N lên AC và I là trung điểm của MN . Chứng minh rằng tam giác IHK cân

Bài 5(1 điểm)

Cho 9 số nguyên dương đôi một phân biệt ,các số đó đều chỉ chứa các ước số nguyên tố gồm 2,3,5 .Chứng minh rằng trong 9 số đã cho tồn tại 2 số mà tích của chúng là một số chính phương

Bài làm

Bài 1(2 điểm)

1.Giải phương trình $(x-1)(x+2)+2\sqrt{x^2+x+1}=0$

2.Cho x,y là các số thực dương .Chứng minh rằng $\left| \frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} \right| + \left| \frac{x+y}{2} + \sqrt{xy} \right| = |x| + |y|$

Đẳng thức trên còn đúng hay không nếu x,y là các số thực âm .Tại sao ?

Bài làm

Bài 1(2 điểm)

1.Phương trình $(x-1)(x+2)=-2\sqrt{x^2+x+1}$

Đến đây ta có điều kiện: $-2 \leq x \leq 1$.

Bình phương hai vế và thu gọn ta được

$$x(x+1)(x^2+x-8)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-1 \\ x=\frac{-1+\sqrt{33}}{2} \\ x=\frac{-1-\sqrt{33}}{2} \end{cases}$$

Giải ra so sánh với điều kiện ta được nghiệm: $x=0$; $x=-1$.

2. Ta có

$$\left| \frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} \right| + \left| \frac{x+y}{2} + \sqrt{xy} \right| = \left| \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{2} \right| + \left| \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{2} \right| = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{2} + \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{2} = x+y = |x| + |y|$$

(Vì x,y là các số thực dương)

Đặt $x=-a$; $y=-b$; $a;b \geq 0$.Ta có

$$\left| \frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} \right| + \left| \frac{x+y}{2} + \sqrt{xy} \right| = \left| \frac{-a-b}{2} - \sqrt{ab} \right| + \left| \frac{-a-b}{2} + \sqrt{ab} \right| = \left| \frac{-a-2\sqrt{ab}-b}{2} \right| + \left| \frac{-a+2\sqrt{ab}-b}{2} \right|.$$

Nên ta có

$$\left| \frac{-a-2\sqrt{ab}-b}{2} \right| + \left| \frac{-a+2\sqrt{ab}-b}{2} \right| = \left| \frac{-(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{2} \right| + \left| \frac{-(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \right| = \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{2} + \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}$$

$$\text{Hay } \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{2} + \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} = a+b = |a|+|b| \text{ (do } a, b \text{ dương)}$$

Vậy đẳng thức trên còn đúng nếu x,y là các số thực âm.

Bài 2(2 điểm)

1. Giả sử n là số nguyên dương thỏa mãn điều kiện $n^2 + n + 3$ là số nguyên tố. Chứng minh rằng n chia 3 dư 1 và $7n^2 + 6n + 2017$ không phải số chính phương

2. Tìm tất cả các số nguyên x,y thỏa mãn phương trình $2x^2 + 4y^2 - 4xy + 2x + 1 = 2017$

Bài làm

1. Vì n là số nguyên dương nên $n^2 + n + 3 > 3$

mà $n^2 + n + 3$ là số nguyên tố nên n không chia hết cho 3.

Giả sử n chia hết cho 3 $\Rightarrow n^2 + n + 3 : 3$ (vô lý) $\Rightarrow$ n không chia hết cho 3.

+) Với $n \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow n^2 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow n^2 + n : 3$ suy ra $n^2 + n + 3 : 3$ (vô lý)

$\Rightarrow$ n chia 3 dư 1 (*)

Với n chia 3 dư 1 thì $7n^2 + 6n + 2017 \equiv 2 \pmod{3}$ nên không là số chính phương (**)

Từ (*) và (**) $\Rightarrow$ ĐPCM

2. Ta có $2x^2 + 4y^2 - 4xy + 2x + 1 = 2017 \Leftrightarrow (x-2y)^2 + (x+1)^2 = 2017 = 9^2 + 44^2$

$$\text{TH1 : } (x+1)^2 = 9^2 \Rightarrow \begin{cases} x=8 \\ x=-10 \end{cases}$$

$$\text{Với } x=8 \text{ thì ta có } (8-2y)^2 + (8+1)^2 = 2017 = 9^2 + 44^2 \Rightarrow (8-2y)^2 = 44^2 \Rightarrow \begin{cases} y=-18 \\ y=26 \end{cases}$$

Với x=-10 thì ta có

$$(-10-2y)^2 + (-10+1)^2 = 2017 = 9^2 + 44^2 \Rightarrow (-10-2y)^2 = 44^2 \Rightarrow \begin{cases} y=-27 \\ y=17 \end{cases}$$

$$\text{TH2 : } (x+1)^2 = 44^2 \Rightarrow \begin{cases} x=43 \\ x=-45 \end{cases}$$

Với $x=43$ thì ta có $(43-2y)^2 + (43+1)^2 = 2017 = 9^2 + 44^2 \Rightarrow (43-2y)^2 = 9^2 \Rightarrow \begin{cases} y = 17 \\ y = 26 \end{cases}$

Với $x=-45$ thì ta có $(-45-2y)^2 + (-45+1)^2 = 2017 = 9^2 + 44^2 \Rightarrow (-45-2y)^2 = 9^2 \Rightarrow \begin{cases} y = -27 \\ y = -18 \end{cases}$

Vậy nghiệm nguyên của phương trình là : $(8;-18);(8;26);(-10;-27);$

$(-10;17);(43;17);(43;26);(-45;-27);(-45;-18).$

Bài 3(2 điểm)

1.Cho đa thức $P(x) = x^3 - 6x^2 + 15x - 11$ và các số thực a, b thỏa mãn $P(a)=1$, $P(b)=5$. Tính giá trị của biểu thức $a+b$.

2.Giả sử x, y là các số thực dương thay đổi và thỏa mãn điều kiện

$x(xy+1) = 2y^2$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $H = \frac{y^4}{1+y^2+y^4(x^4+x^2)}$

Bài làm

1.Ta có : $P(a)=1 \Rightarrow a^3 - 6a^2 + 15a - 11 = 1$ (1).

Ta có : $P(b)=5 \Rightarrow b^3 - 6b^2 + 15b - 11 = 5$ (2)

Lấy (1) cộng (2) ta được :

$$(a+b-4)[(a-b)^2 + (a-2)^2 + (b-2)^2 + 6] = 0$$

Lúc này ta suy ra $a+b=4$

2. Cách 1: $H = \frac{y^4}{1+y^2+y^4(x^4+x^2)} = \frac{1}{\frac{1}{y^4} + \frac{1}{y^2} + x^4 + x^2} \leq \frac{1}{\frac{2x^2}{y} + \frac{2x}{y^2}}.$

Mà giả thiết ta suy ra $x(xy+1) = 2y^2 \Rightarrow \frac{2x^2}{y} + \frac{2x}{y^2} = 2.$

Thay vào ta suy ra $H = \frac{y^4}{1+y^2+y^4(x^4+x^2)} = \frac{1}{\frac{1}{y^4} + \frac{1}{y^2} + x^4 + x^2} \leq \frac{1}{\frac{2x^2}{y} + \frac{2x}{y^2}} = \frac{1}{4}.$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức $H = \frac{y^4}{1+y^2+y^4(x^4+x^2)}$ khi $x=y=1$

$$\text{Cách 2: } H = \frac{y^4}{1+y^2+y^4(x^4+x^2)} = \frac{1}{\frac{1}{y^4} + \frac{1}{y^2} + x^2 + x^4}$$

$$\text{Đặt } z = \frac{1}{y} \Rightarrow y = \frac{1}{z} \Leftrightarrow x(x \cdot \frac{1}{z} + 1) = 2 \cdot \frac{1}{z^2} \Leftrightarrow xz(x+z) = 2.$$

$$\text{Lúc đó ta có } H = \frac{y^4}{1+y^2+y^4(x^4+x^2)} = \frac{1}{\frac{1}{y^4} + \frac{1}{y^2} + x^2 + x^4} = \frac{1}{z^4 + x^4 + z^2 + x^2}$$

$$\text{Ta có } z^4 + x^4 + z^2 + x^2 \geq \frac{(x+z)^2}{2} + 2z^2x^2 \geq 2\sqrt{2x^2z^2} \cdot \frac{(x+z)^2}{2} = 4$$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức $H = \frac{y^4}{1+y^2+y^4(x^4+x^2)}$ khi $x=y=1$

Bài 4(3 điểm)

1.Cho hai điểm A,B phân biệt nằm trong góc nhọn xOy sao cho $xOA = yOB$.Gọi M,N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên các tia Ox,Oy và P,Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của B lên các tia Ox,Oy .Giả sử M,N,P,Q đôi một phân biệt .Chứng minh rằng bốn điểm M,N,P,Q cùng thuộc một đường tròn

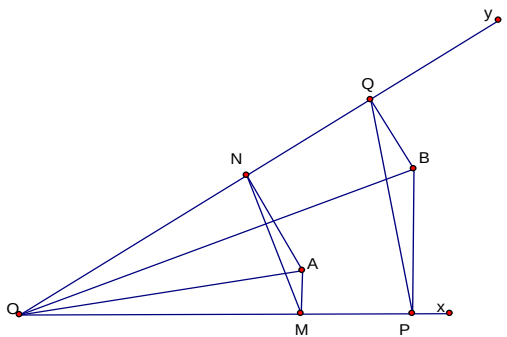
2.Cho tam giác ABC không cân ,có ba góc nhọn .Một đường tròn đi qua B,C cắt các cạnh AC,AB lần lượt tại D,E .Gọi M,N lần lượt là trung điểm của BD,CE .

a.Chứng minh rằng các tam giác ABD ,ACE đồng dạng với nhau và $\angle MAB = \angle NAC$

b.Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên AB ,K là hình chiếu vuông góc của N lên AC và I là trung điểm của MN .Chứng minh rằng tam giác IHK cân

Bài làm

1.



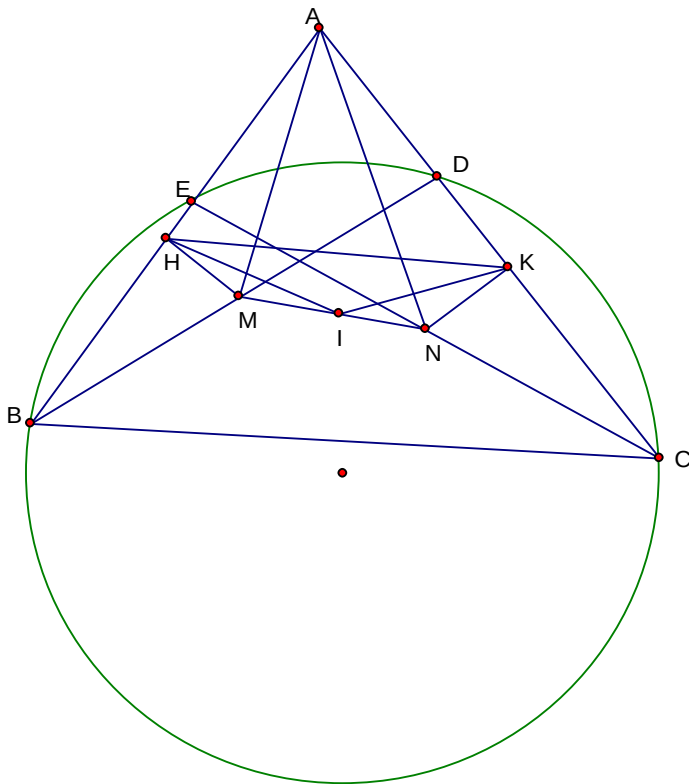
Ta có $\triangle OAM \sim \triangle OBQ$ (g.g) nên suy ra $\frac{OM}{OQ} = \frac{OA}{OB}$ (1)

Ta có $\triangle OAN \sim \triangle OBP$ (g.g) nên suy ra $\frac{ON}{OP} = \frac{OA}{OB}$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra $\frac{OM}{OQ} = \frac{OA}{OB} = \frac{ON}{OP}$ suy ra $OP \cdot OM = ON \cdot OQ$

$\Rightarrow$ 4 điểm M;N;P;Q cùng thuộc 1 đường tròn.

2.a/



Ta có xét $\triangle ABD$ và $\triangle ACE$ có :

$\angle BAD = \angle EAC$ (góc chung) và $\angle ABD = \angle ACE$ (tứ giác BEDC nội tiếp)

Nên suy ra $\triangle ABD \sim \triangle ACE$ (g.g) .

Ta có $\triangle MAB \sim \triangle NAC$ (g.g) nên suy ra $\angle MAB = \angle NAC$

Bài 5(1 điểm)

Cho 9 số nguyên dương đôi một phân biệt ,các số đó đều chỉ chứa các ước số nguyên tố gồm 2,3,5 .Chứng minh rằng trong 9 số đã cho tồn tại 2 số mà tích của chúng là một số chính phương .

Bài làm

Cho 9 số nguyên dương đôi một phân biệt ,các số đó đều chỉ chứa các ước số nguyên tố gồm 2,3,5 có dạng $2^x \cdot 3^y \cdot 5^z$.Lúc này ta suy ra $(x;y;z)$ chỉ có các dạng (chẵn, chẵn, chẵn), (lẻ, lẻ, lẻ), (chẵn, chẵn, lẻ), (chẵn, lẻ, lẻ) và các hoán vị.
Ta thấy có tất cả là 8 trường hợp .