

Câu 1 (2,5 điểm)

a) Rút gọn biểu thức $A = \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} + \frac{2\sqrt{2}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases}$

c) Giải phương trình $x^2 + 2x - 8 = 0$

Câu 2 (2,0 điểm)

Cho parabol (P): $y = -x^2$ và đường thẳng (d): $y = 4x - m$

a) Vẽ parabol (P)

b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để (d) và (P) có đúng một điểm chung

Câu 3 (1,5 điểm).

a) Cho phương trình $x^2 - 5x + 3m + 1 = 0$ (m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình trên có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1^2 - x_2^2| = 15$

b) Giải phương trình $(x - 1)^4 = x^2 - 2x + 3$

Câu 4 (3,5 điểm).

Cho nửa đường tròn (O) có đường kính $AB = 2R$. CD là dây cung thay đổi của nửa đường tròn sao cho $CD = R$ và C thuộc cung AD (C khác A và D khác B). AD cắt BC tại H, hai đường thẳng AC và BD cắt nhau tại F.

a) Chứng minh tứ giác CFDH nội tiếp

b) Chứng minh $CF \cdot CA = CH \cdot CB$

c) Gọi I là trung điểm của HF. Chứng minh tia OI là tia phân giác của góc COD.

d) Chứng minh điểm I thuộc một đường tròn cố định khi CD thay đổi

Câu 5 (0,5 điểm).

Cho a, b, c là 3 số dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 3abc$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a^2 + bc} + \frac{b}{b^2 + ca} + \frac{c}{c^2 + ab} \leq \frac{3}{2}$$

ĐÁP ÁN – LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1

$$a) A = \frac{\sqrt{3}-1+\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} + \frac{\sqrt{2}(2-\sqrt{3})}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3-1} + 2 - \sqrt{3} = \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} = 2$$

$$b) \begin{cases} 3x - y = 1 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x - 1 \\ 2x + 3(3x - 1) = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x - 1 \\ 11x = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x - 1 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}.$$

Hệ có nghiệm duy nhất (1;2)

$$c) x^2 + 2x - 8 = 0. \text{ Có } \Delta' = 1 + 8 = 9 > 0$$

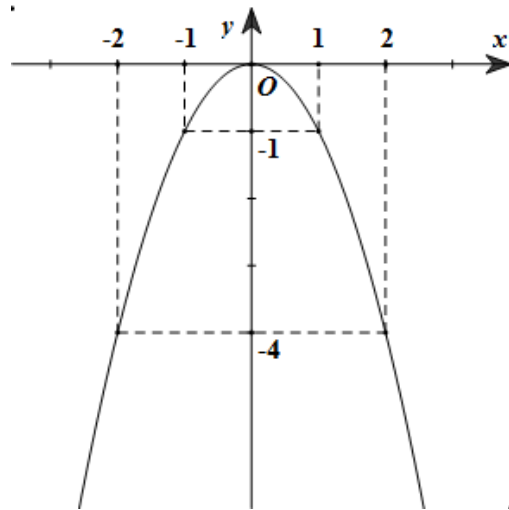
Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = -1 + 3 = 2$; $x_2 = -1 - 3 = -4$

Câu 2

a) Bảng giá trị

x	-2	-1	0	1	2
$y = -x^2$	-4	-1	0	-1	-4

Đồ thị:



$$b) \text{ Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P): } -x^2 = 4x - m \Leftrightarrow x^2 + 4x - m = 0 \quad (1)$$

$$(d) \text{ và (P) có đúng 1 điểm chung} \Leftrightarrow \text{phương trình (1) có nghiệm kép} \Leftrightarrow \Delta' = 2^2 - (-m) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4 + m = 0 \Leftrightarrow m = -4$$

$$\text{Vậy } m = -4$$

Câu 3

a) $x^2 - 5x + 3m + 1 = 0$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta = 5^2 - 4(3m + 1) > 0 \Leftrightarrow 21 - 12m > 0$

$$\Leftrightarrow m < \frac{21}{12}$$

Với $m < \frac{21}{12}$, ta có hệ thức $\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 x_2 = 3m + 1 \end{cases}$ (Viết)

$$\Rightarrow |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \sqrt{5^2 - 4(3m + 1)} = \sqrt{21 - 12m}$$

$$\Rightarrow |x_1^2 - x_2^2| = |(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)| = |5(x_1 - x_2)| = 5|x_1 - x_2| = 5\sqrt{21 - 12m}$$

Ta có $|x_1^2 - x_2^2| = 15 \Leftrightarrow 5\sqrt{21 - 12m} = 15 \Leftrightarrow \sqrt{21 - 12m} = 3 \Leftrightarrow 21 - 12m = 9 \Leftrightarrow 12m = 12 \Leftrightarrow m = 1$
(tm)

Vậy $m = 1$ là giá trị cần tìm

b) $(x-1)^4 = x^2 - 2x + 3$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow [(x-1)^2]^2 = x^2 - 2x + 3 \Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1)^2 = x^2 - 2x + 3 \quad (2)$$

Đặt $t = x^2 - 2x + 1, t \geq 0$, phương trình (2) trở thành $t^2 = t + 2 \Leftrightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow (t-2)(t+1) = 0$

$\Leftrightarrow t = 2$ (tm) hoặc $t = -1$ (loại)

Với $t = 2$ có $x^2 - 2x + 1 = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$

Vậy tập nghiệm của phương trình (1) là $\{1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}\}$

Câu 4



Suy ra tứ giác CHDF nội tiếp

b) Vì $AH \perp BF$, $BH \perp AF$ nên H là trực tâm $\Delta AFB \Rightarrow FH \perp AB$

c) Vì $FCH = FDH = 90^\circ$ nên tứ giác CHDF nội tiếp đường tròn tâm I đường kính FH

$\Rightarrow$ OI là phân giác của góc COD

d) Vì $OC = CD = OD = R$ nên $\triangle OCD$ đều $\Rightarrow \angle COD = 60^\circ$

Xét góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung CD của (I), có

Mặt khác $COI = DOI = \frac{COD}{2} = 30^\circ \Rightarrow OI D + DOI = 90^\circ \Rightarrow \Delta OI D$ vuông tại D

Suy ra $OI = \frac{OD}{\sin 60^\circ} = \frac{2R}{\sqrt{3}}$

Vậy I luôn thuộc đường tròn $\left(O; \frac{2R}{\sqrt{3}}\right)$

Câu 5

Từ điều kiện đề bài ta có $\frac{ab+bc+ca}{abc} = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3$

Áp dụng hai lần bất đẳng thức Côsi cho hai số dương, ta có:

$$a^2 + bc \geq 2\sqrt{a^2 \cdot bc} = 2a\sqrt{bc} \Rightarrow \frac{a}{a^2 + bc} \leq \frac{a}{2a\sqrt{bc}} = \frac{1}{2\sqrt{bc}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{b}} \cdot \frac{1}{\sqrt{c}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \Rightarrow \frac{a}{a^2 + bc} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

Tương tự ta có: $\frac{b}{b^2 + ca} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} \right); \frac{c}{c^2 + ab} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$

Suy ra $\frac{a}{a^2 + bc} + \frac{b}{b^2 + ca} + \frac{c}{c^2 + ab} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = \frac{3}{2}$.