

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KỶ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN QUỐC HỌC
THỪA THIÊN HUẾ**

NĂM HỌC 2017-2018

Khóa ngày 02 tháng 6 năm 2017

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Môn thi: TOÁN (CHUYÊN TOÁN)

Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Câu 1: (1,5 điểm)

a) Cho các biểu thức $P(x) = \frac{1}{x} + \frac{9-x}{x+3\sqrt{x}}$, $Q(x) = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$ với $x > 0$. Tìm số nguyên x nhỏ nhất thỏa mãn $\frac{P(x)}{Q(x)} \leq \frac{1}{2}$.

b) Tính giá trị của biểu thức $F = \frac{2x^4 - 21x^3 + 55x^2 - 32x - 4012}{x^2 - 10x + 20}$ khi $x = 5 - \sqrt{3}$ (không sử dụng máy tính cầm tay).

Câu 2: (2,0 điểm)

a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol (P): $y = x^2$, đường thẳng (d) có hệ số góc k và đi qua điểm $M(0; 1)$. Chứng minh rằng với mọi giá trị của k , (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B có hoành độ x_1, x_2 thỏa điều kiện $|x_1 - x_2| \geq 2$.

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 9 \\ x^2 + 2y^2 = x + 4y \end{cases}$$

Câu 3: (1,5 điểm)

Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)\sqrt{x^2+1} + m^2 - m - 2 = 0$ (1) (x là ẩn số).

a) Giải phương trình (1) khi $m = 0$.

b) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt.

Câu 4: (3,0 điểm)

Cho đường tròn (O) có tâm O và hai điểm C, D trên (O) sao cho ba điểm C, O, D không thẳng hàng. Gọi Ct là tia đối của tia CD, M là điểm tùy ý trên Ct, M khác C. Qua M kẻ các tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (O) (A và B là các tiếp điểm, B thuộc cung nhỏ $\widehat{CD}$). Gọi I là trung điểm của CD, H là giao điểm của đường thẳng MO và đường thẳng AB.

a) Chứng minh tứ giác MAIB nội tiếp.

b) Chứng minh đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định khi M di động trên tia Ct.

c) Chứng minh $\frac{MD}{MC} = \frac{HA^2}{HC^2}$.

Câu 5: (2,0 điểm)

a) Cho a, b, c là các số dương thay đổi và thỏa mãn điều kiện $\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ac} = 1$.
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $E = \frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a}$.

b) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $n^2 + 3^n$ là một số chính phương.

----- **Hết** -----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh : Số báo danh :

Chữ ký của giám thị 1 : Chữ ký của giám thị 2 :

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN QUỐC HỌC
THỪA THIÊN HUẾ**

NĂM HỌC 2017-2018

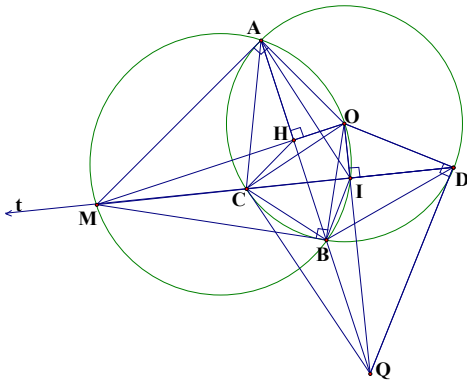
Khóa ngày 02 tháng 6 năm 2017

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Môn thi: TOÁN (CHUYÊN TOÁN)

HƯỚNG DẪN CHẤM – ĐÁP ÁN – THANG ĐIỂM

Câu	Đáp án	Điểm
1 (1,5 điểm)	a) Cho các biểu thức $P(x) = \frac{1}{x} + \frac{9-x}{x+3\sqrt{x}}$, $Q(x) = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$ với $x > 0$. Tìm số nguyên x nhỏ nhất thỏa mãn $\frac{P(x)}{Q(x)} \leq \frac{1}{2}$.	0,75
	Ta có $Q(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} > 0, \forall x > 0$. Do đó $\frac{P(x)}{Q(x)} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2P(x) \leq Q(x)$	0,25
	$\Leftrightarrow 2\left(\frac{1}{x} + \frac{9-x}{x+3\sqrt{x}}\right) \leq \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow 3x - 5\sqrt{x} - 2 \geq 0$	0,25
	$\Leftrightarrow (\sqrt{x} - 2)(3\sqrt{x} + 1) \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \geq 2 \Leftrightarrow x \geq 4$ (vì $3\sqrt{x} + 1 > 0$). Vậy giá trị nguyên nhỏ nhất của x cần tìm là $x = 4$.	0,25
	b) Tính giá trị của biểu thức $F = \frac{2x^4 - 21x^3 + 55x^2 - 32x - 4012}{x^2 - 10x + 20}$ khi $x = 5 - \sqrt{3}$ (không dùng máy tính cầm tay).	0,75
	Ta có $x = 5 - \sqrt{3}$ suy ra $5 - x = \sqrt{3}$. Do đó $(5 - x)^2 = 3 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 22 = 0$.	0,25
	Ta có $F = \frac{(x^2 - 10x + 22)(2x^2 - x + 1) - 4034}{x^2 - 10x + 20}$.	0,25
	Mà $x^2 - 10x + 22 = 0$ nên $x^2 - 10x + 20 = -2$. Suy ra $F = \frac{-4034}{-2} = 2017$.	0,25
2 (2,0 điểm)	a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol (P): $y = x^2$, đường thẳng (d) có hệ số góc k và đi qua điểm $M(0; 1)$. Chứng minh rằng với mọi giá trị của k, (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B có hoành độ x_1, x_2 thỏa điều kiện $x_1 - x_2 \geq 2$.	1,00
	Đường thẳng (d) có phương trình $y = kx + 1$.	0,25
	Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là $x^2 - kx - 1 = 0$ (1). Ta có $\Delta = k^2 + 4 > 0$, với mọi k nên phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt. Suy ra (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.	0,25
	Theo định lý Vi-ét, ta có: $x_1 + x_2 = k, x_1 x_2 = -1$.	0,25
	Suy ra $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = k^2 + 4 \geq 4$.	
	Do đó $ x_1 - x_2 \geq 2$ (dấu “=” xảy ra khi $k = 0$).	0,25
	b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + y^3 = 9 & (1) \\ x^2 + 2y^2 = x + 4y & (2) \end{cases}$.	1,00
	Nhân hai vế phương trình (2) cho 3, ta được $3x^2 + 6y^2 = 3x + 12y$ (3).	0,25
	Trừ hai phương trình (1) và (3) vế theo vế, ta được $(x - 1)^3 = (2 - y)^3 \Leftrightarrow y = 3 - x$.	0,25

	Thế $y = 3 - x$ vào (3), ta được $x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 2$.	0,25
	Với $x = 1$ thì $y = 2$. Với $x = 2$ thì $y = 1$. Hệ phương trình có hai nghiệm $(2; 1), (1; 2)$.	0,25
3 (1,5 điểm)	Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)\sqrt{x^2+1} + m^2 - m - 2 = 0$ (1) (x là ẩn số). a) Giải phương trình (1) khi $m = 0$.	0,50
	Khi $m = 0$, phương trình trở thành $x^2 - 2\sqrt{x^2+1} - 2 = 0$. Đặt $t = \sqrt{x^2+1}, t \geq 1$. Ta có phương trình $t^2 - 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = 3$ hoặc $t = -1$ (loại).	0,25
	Với $t = 3$, khi đó $\sqrt{x^2+1} = 3 \Leftrightarrow x^2 = 8 \Leftrightarrow x = \pm 2\sqrt{2}$.	0,25
	b) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt.	1,00
	Đặt $t = \sqrt{x^2+1}, t \geq 1$ phương trình trở thành $t^2 - 2(m+1)t + m^2 - m - 3 = 0$ (2).	0,25
	(1) có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm phân biệt t_1, t_2 cùng lớn hơn 1	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ (t_1 - 1)(t_2 - 1) > 0 \\ t_1 - 1 + t_2 - 1 > 0 \end{cases}$	
4 (3,0 điểm)	$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ t_1 t_2 - (t_1 + t_2) + 1 > 0 \\ t_1 + t_2 - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m^2 + 2m + 1) - (m^2 - m - 3) > 0 \\ m^2 - m - 3 - (2m + 2) + 1 > 0 \\ 2m + 2 - 2 > 0 \end{cases}$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} 3m + 4 > 0 \\ m^2 - 3m - 4 > 0 \\ 2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -4/3 \\ m < -1 \text{ hoặc } m > 4 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 4.$	0,25
	Vậy với $m > 4$ thì phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt.	
	Cho đường tròn (O) có tâm O và hai điểm C, D trên (O) sao cho ba điểm C, O, D không thẳng hàng. Gọi Ct là tia đối của tia CD, M là điểm tùy ý trên Ct, M khác C. Qua M kẻ các tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (O) (A và B là các tiếp điểm, B thuộc cung nhỏ $\widehat{CD}$). Gọi I là trung điểm của CD, H là giao điểm của đường thẳng MO và đường thẳng AB. a) Chứng minh tứ giác MAIB nội tiếp.	1,00
		
	MA, MB là các tiếp tuyến của đường tròn (O) $\Rightarrow \widehat{MAO} = \widehat{MBO} = 90^\circ$.	0,25
	I là trung điểm của CD nên $OI \perp CD \Rightarrow \widehat{MIO} = 90^\circ$.	0,25
	Suy ra các điểm A, I, B cùng thuộc đường tròn đường kính MO.	0,25
	Vậy tứ giác MAIB nội tiếp đường tròn đường kính MO.	0,25

	b) Chứng minh đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định khi M di động trên tia Ct.	1,00
	Các tiếp tuyến tại C và D cắt nhau tại Q nằm trên đường thẳng OI. Ta có $\triangle MAC$ đồng dạng với $\triangle MDA$ ($\widehat{M}$ chung và $\widehat{MAC} = \widehat{MDA} = \frac{1}{2}\widehat{AC}$). Suy ra $\frac{MA}{MD} = \frac{MC}{MA} \Leftrightarrow MA^2 = MC.MD$. Mà $\triangle MAO$ vuông ở A có đường cao AH nên $MA^2 = MH.MO$. Suy ra $MC.MD = MH.MO \Rightarrow \frac{MC}{MH} = \frac{MO}{MD}$. Do đó $\triangle MCH$ và $\triangle MOD$ đồng dạng. Từ đó $\widehat{CHM} = \widehat{ODM}$. Suy ra tứ giác CHOD nội tiếp (1).	0,25
	Tứ giác QCOD có $\widehat{OCQ} = \widehat{ODQ} = 90^\circ$ nên nội tiếp đường kính OQ (2). Từ (1) và (2) ta có năm điểm C, H, O, D, Q thuộc đường tròn đường kính OQ.	0,25
	Suy ra $\widehat{QHO} = 90^\circ$. Do đó $QH \perp MO$ tại H. Mà $AB \perp MO$ tại H. Do đó hai đường thẳng QH và AB trùng nhau. Suy ra Q nằm trên đường thẳng AB.	0,25
	Vì d và (O) và C, D, I cố định nên Q cố định. Vậy AB luôn đi qua một điểm cố định Q khi M di động trên tia Ct.	0,25
	c) Chứng minh $\frac{MD}{MC} = \frac{HA^2}{HC^2}$.	1,00
	Hai tam giác MBC và MDB có $\widehat{M}$ chung và $\widehat{MBC} = \widehat{MDB} = \frac{1}{2}\widehat{BC}$ nên đồng dạng.	0,25
	Suy ra $\frac{MD}{MB} = \frac{MB}{MC} = \frac{BD}{BC} \Rightarrow \frac{MD}{MC} = \frac{MB^2}{MC^2} = \left(\frac{BD}{BC}\right)^2$ (3).	0,25
	Lại có $\widehat{CAH} = \widehat{CDB} = \frac{1}{2}\widehat{BC}$ (4). Mà $\triangle MCH$ đồng dạng với $\triangle MOD$ nên $\widehat{MHC} = \widehat{MDO}$. Suy ra $\widehat{AHC} = 90^\circ + \widehat{MHC} = 90^\circ + \widehat{CDO} = 90^\circ + \frac{180^\circ - \widehat{COD}}{2} = 180^\circ - \frac{1}{2}\widehat{COD}$ $= \frac{1}{2}(360^\circ - \widehat{COD}) = \frac{1}{2}\widehat{CAD} = \widehat{CBD}$ (5).	0,25
	Từ (4), (5) ta có hai tam giác AHC và DBC đồng dạng. Suy ra $\frac{BD}{BC} = \frac{HA}{HC}$ (6). Từ (3) và (6) suy ra $\frac{MD}{MC} = \frac{HA^2}{HC^2}$.	0,25
5 (2,0 điểm)	a) Cho a, b, c là các số dương thay đổi và thỏa mãn điều kiện $\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ac} = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $E = \frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a}$.	1,00
	Ta có $\frac{a^2}{a+b} + \frac{a+b}{4} \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{a+b} \cdot \frac{a+b}{4}} = a$. Chứng minh tương tự ta có $\frac{b^2}{b+c} + \frac{b+c}{4} \geq b$, $\frac{c^2}{c+a} + \frac{c+a}{4} \geq c$.	0,25

Cộng các bất đẳng thức trên về theo về ta được $\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} + \frac{a+b}{4} + \frac{b+c}{4} + \frac{c+a}{4} \geq a+b+c$ $\Leftrightarrow \frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} \geq \frac{a+b+c}{2}.$	0,25
Do $a+b \geq 2\sqrt{ab}$, $b+c \geq 2\sqrt{bc}$, $c+a \geq 2\sqrt{ca}$ nên $a+b+c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ac} = 1$. Suy ra $\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} \geq \frac{1}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.	0,25
Vậy giá trị nhỏ nhất của E là $\frac{1}{2}$, đạt được tại $a=b=c=\frac{1}{3}$.	0,25
b) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $n^2 + 3^n$ là một số chính phương.	1,00
Gọi m là số nguyên dương thỏa mãn $n^2 + 3^n = m^2$. Khi đó $(m-n)(m+n) = 3^n$. Suy ra tồn tại số tự nhiên k sao cho $m-n = 3^k$ và $m+n = 3^{n-k}$. Vì $m-n < m+n$ nên $k < n-k$, do đó $n-2k \geq 1$.	0,25
Nếu $n-2k=1$ thì $2n = (m+n) - (m-n) = 3^{n-k} - 3^k = 3^k(3^{n-2k} - 1) = 3^k(3^1 - 1) = 2 \cdot 3^k$. Vì vậy $n = 3^k = 2k+1$. + Nếu $k=0$ thì $n=1$. + Nếu $k=1$ thì $n=3$. + Nếu $k \geq 2$ thì $3^k - 1 = 2(3^{k-1} + 3^{k-2} + \dots + 3 + 1) > 2k$ (*).	0,25
Nếu $n-2k > 1$ thì $k \leq n-k-2$. Do đó $3^k \leq 3^{n-k-2}$. Suy ra $2n = 3^{n-k} - 3^k \geq 3^{n-k} - 3^{n-k-2} = 3^{n-k-2}(3^2 - 1) = 8 \cdot 3^{n-k-2}$.	0,25
Áp dụng (*), ta có $3^{n-k-2} \geq 1 + 2(n-k-2) = 2n-2k-3$. Suy ra $2n \geq 8(2n-2k-3) \Leftrightarrow 8k+12 \geq 7n$. Mặt khác $n \geq 2k+2$ nên $7n \geq 14k+14$, mâu thuẫn. Vậy $n=1$ hoặc $n=3$.	0,25
Cách khác: Giả sử $n^2 + 3^n = m^2$ (1), với m là số nguyên dương, $m > n$. Khi đó $(m-n)(m+n) = 3^n$. Suy ra $m+n = 3^p$, $m-n = 3^q$, với p, q là các số tự nhiên và $p > q$. Ta có $\frac{m+n}{m-n} = 3^{p-q} \Rightarrow 1 + 2 \cdot \frac{n}{m-n} = 3^{p-q} \Rightarrow \frac{n}{m-n} = \frac{3^{p-q} - 1}{2} \geq 1 \Rightarrow 2n \geq m$.	0,25
Suy ra $n^2 + 3^n \leq 4n^2 \Rightarrow 3^n \leq 3n^2$ (2).	0,25
Thử trực tiếp $n=1, n=2, n=3$ thỏa mãn (2), nhưng chỉ có $n=1, n=3$ thỏa mãn (1).	0,25
Ta chứng minh (2) không đúng với $n \geq 4$. Thật vậy: + $n=4$: $3^4 > 3 \cdot 4^2$. + Giả sử $3^n > 3n^2$ với $n \geq 4$. + Suy ra $3^{n+1} = 3 \cdot 3^n > 3 \cdot 3n^2 = 3(n+1)^2 + 3(2n^2 - 2n - 1) > 3(n+1)^2$ với $n \geq 4$. Vậy bài toán có hai nghiệm $n=1$ hoặc $n=3$.	0,25

- Học sinh làm cách khác đáp án nhưng kết quả đúng vẫn cho điểm tối đa.
- Điểm toàn bài chấm điểm lẻ đến 0,25.
- Đáp án gồm 04 trang.

----- Hết -----