

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN QUỐC HỌC
THỪA THIÊN HUẾ**

NĂM HỌC 2017-2018

Khóa ngày 02 tháng 6 năm 2017

Môn thi: TOÁN (CHUYÊN TIN)

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Câu 1: (1,5 điểm)

Cho biểu thức: $M = \frac{a+1}{\sqrt{a}} + \frac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}} + \frac{a^2-a\sqrt{a}+\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}-a\sqrt{a}}$ với $a > 0, a \neq 1$.

a) Chứng minh rằng $M > 4$.

b) Tìm tất cả các giá trị của a để biểu thức $N = \frac{6}{M}$ nhận giá trị nguyên.

Câu 2: (1,5 điểm)

Cho parabol (P): $y = 2x^2$ và đường thẳng (d): $y = ax + b$.

a) Tìm điều kiện của b sao cho với mọi số thực a , parabol (P) luôn cắt đường thẳng (d) tại hai điểm phân biệt.

b) Gọi A là giao điểm của (P) và (d) có hoành độ bằng 1, B là giao điểm của (d) và trục tung. Biết rằng tam giác OAB có diện tích bằng 2, tìm a và b .

Câu 3: (2,0 điểm)

a) Cho phương trình $x^2 - 2(m+3)x + 2m + 5 = 0$ (x là ẩn số). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình có hai nghiệm dương phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $\frac{1}{\sqrt{x_1}} + \frac{1}{\sqrt{x_2}} = \frac{4}{3}$.

b) Giải phương trình: $\frac{1}{x^2 - x - 2} + \frac{3}{x^2 + 3x - 2} = \frac{1}{x}$.

Câu 4: (3,0 điểm)

Cho đường tròn $(O; R)$ và hai đường kính AB, CD vuông góc với nhau, M là điểm thuộc cung CD không chứa A của $(O; R)$ (M không trùng với hai điểm C và D). Đường thẳng AM cắt CD tại N.

Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CMN. Đường thẳng IM cắt đường tròn $(O; R)$ tại K.

a) Chứng minh tam giác INC vuông cân tại I. Từ đó suy ra ba điểm I, B, C thẳng hàng.

b) Tính tỉ số $\frac{R^2 - OI^2}{IM \cdot IK}$.

c) Tìm vị trí của điểm sao cho tích $IM \cdot IK$ có giá trị lớn nhất.

Câu 5: (2,0 điểm)

a) Tìm tất cả các số nguyên x, y, z không âm thỏa mãn $xyz + xy + yz + zx + x + y + z = 2017$.

b) Bên trong hình vuông cạnh bằng 1, lấy 9 điểm phân biệt tùy ý sao cho không có bất kỳ 3 điểm nào trong chúng thẳng hàng. Chứng minh rằng tồn tại 3 điểm trong số đó tạo thành một tam giác có diện tích không vượt quá $\frac{1}{8}$.

----- Hết -----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:.....Số báo danh:.....

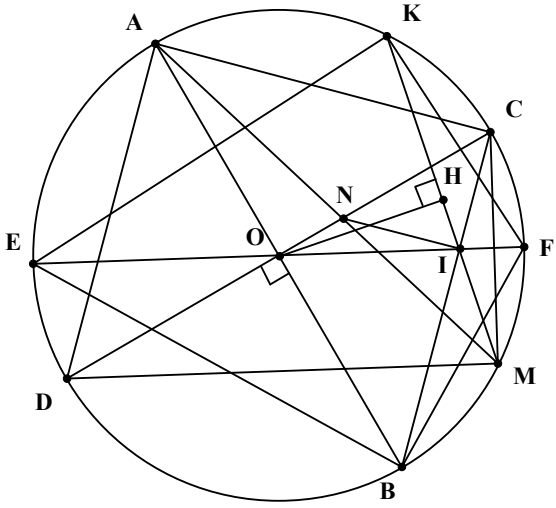
Chữ ký của giám thị 1:.....Chữ ký của giám thị 2 :.....

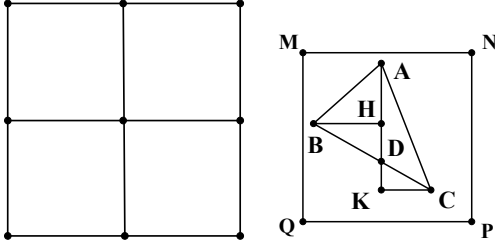
HƯỚNG DẪN CHẤM – ĐÁP ÁN – THANG ĐIỂM

(Nội dung có 04 trang)

Câu	Đáp án	Điểm
1 (1,5 điểm)	Cho biểu thức: $M = \frac{a+1}{\sqrt{a}} + \frac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}} + \frac{a^2-a\sqrt{a}+\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}-a\sqrt{a}}$ với $a > 0, a \neq 1$.	0,75
	a) Chứng minh rằng $M > 4$.	
	Ta có $M = \frac{a+1}{\sqrt{a}} + \frac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}} + \frac{a^2-a\sqrt{a}+\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}-a\sqrt{a}}$	0,25
	Do $a > 0, a \neq 1$ nên: $\frac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}} = \frac{(\sqrt{a}-1)(a+\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)} = \frac{a+\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}}$	
	$\frac{a^2-a\sqrt{a}+\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}-a\sqrt{a}} = \frac{(a+1)(a-1)-\sqrt{a}(a-1)}{\sqrt{a}(1-a)} = \frac{(a-1)(a-\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}(1-a)} = \frac{-a+\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}}$	0,25
	Nên $M = \frac{a+1}{\sqrt{a}} + \frac{a+\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}} + \frac{-a+\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}} = \frac{a+2\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}} = \frac{a+1}{\sqrt{a}} + 2$.	
	Do $a > 0, a \neq 1$ nên: $(\sqrt{a}-1)^2 > 0 \Leftrightarrow a+1 > 2\sqrt{a} \Rightarrow M > \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{a}} + 2 = 4$.	0,25
	b) Với những giá trị nào của a thì biểu thức $N = \frac{6}{M}$ nhận giá trị nguyên?	0,75
2 (1,5 điểm)	Ta có $0 < N = \frac{6}{M} < \frac{3}{2}$ do đó N chỉ có thể nhận được một giá trị nguyên là 1.	0,25
	Khi đó $N = 1 \Leftrightarrow \frac{6\sqrt{a}}{a+1+2\sqrt{a}} = 1 \Leftrightarrow a-4\sqrt{a}+1=0 \Leftrightarrow \sqrt{a}=2+\sqrt{3}$ hay $\sqrt{a}=2-\sqrt{3}$	0,25
	$\Leftrightarrow a=7+4\sqrt{3}$ hoặc $a=7-4\sqrt{3}$.	0,25
2 (1,5 điểm)	Cho parabol (P): $y = 2x^2$ và đường thẳng (d): $y = ax + b$.	
	a) Tìm điều kiện của b sao cho với mọi số thực a, parabol (P) luôn cắt đường thẳng (d) tại hai điểm phân biệt.	0,5
	Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d là: $2x^2 = ax + b \Leftrightarrow 2x^2 - ax - b = 0$ (1)	0,25
	(1) là phương trình bậc 2 có $\Delta = a^2 + 8b$.	
	Với mọi $a \in \mathbb{R}$, parabol (P) luôn cắt đường thẳng (d) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0$ với mọi $a \in \mathbb{R}$	
	$\Leftrightarrow a^2 + 8b > 0$ với mọi $a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow b > -\frac{a^2}{8}$ với mọi $a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow b > 0$.	0,25
	Điều kiện của b để với mọi $a \in \mathbb{R}$, parabol (P) luôn cắt đường thẳng (d) tại hai điểm phân biệt là $b > 0$.	

3 (2,0 điểm)	b) Gọi A là giao điểm của (P) và (d), B là giao điểm của (d) và trục tung. Biết rằng điểm A có hoành độ bằng 1 và tam giác OAB có diện tích bằng 2. Tìm a, b.	1,0
	Ta có A(1;2). Hoành độ của điểm A thỏa phương trình (1), tức là $2 - a - b = 0$ (2)	0,25
	(d) cắt trục tung tại điểm B(0;b). Gọi H(0;2) là chân đường cao kẻ từ A của tam giác AOB. Ký hiệu S_{OAB} là diện tích của tam giác OAB. Khi đó $S_{OAB} = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} OB \cdot AH = \frac{1}{2} b \cdot 1 = 2 \Leftrightarrow b = 4 \Leftrightarrow b = 4 \text{ hoặc } b = -4.$	0,25
	Với $b = 4$, từ (2) ta có $a = -2$.	0,25
	Với $b = -4$, từ (2) ta có $a = 6$. Vậy $\begin{cases} a = -2 \\ b = 4 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a = 6 \\ b = -4 \end{cases}$.	0,25
	a) Cho phương trình $x^2 - 2(m+3)x + 2m + 5 = 0$ (x là ẩn số). Xác định tất cả các giá trị của tham số m để phương trình có hai nghiệm dương phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $\frac{1}{\sqrt{x_1}} + \frac{1}{\sqrt{x_2}} = \frac{4}{3}$.	1,0
	Phương trình $x^2 - 2(m+3)x + 2m + 5 = 0$ có $a + b + c = 1 - 2(m+3) + 2m + 5 = 0$ nên có 2 nghiệm $x_1 = 1, x_2 = 2m + 5$.	0,25
	Phương trình có hai nghiệm dương phân biệt khi $\begin{cases} 2m+5 \neq 1 \\ 2m+5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -2 \\ m > -\frac{5}{2} \end{cases}$	0,25
	$\frac{1}{\sqrt{x_1}} + \frac{1}{\sqrt{x_2}} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2m+5}} = \frac{1}{3}$	0,25
	$\Leftrightarrow \sqrt{2m+5} = 3 \Leftrightarrow 2m+5 = 9 \Leftrightarrow m = 2$ (thỏa mãn)	0,25
	b) Giải phương trình: $\frac{1}{x^2 - x - 2} + \frac{3}{x^2 + 3x - 2} = \frac{1}{x}.$	1,0
	Điều kiện: $x \neq -1, x \neq 2, x \neq 0, x \neq \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$. Phương trình trở thành $\frac{1}{x - \frac{2}{x} - 1} + \frac{3}{x - \frac{2}{x} + 3} = 1$	0,25
	Đặt $t = x - \frac{2}{x}$, ta có phương trình $\frac{1}{t-1} + \frac{3}{t+3} = 1$ $\Leftrightarrow t + 3 + 3(t-1) = (t-1)(t+3) \Leftrightarrow t^2 - 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 3 \end{cases}$	0,25
	Với $t = -1$ ta có $x - \frac{2}{x} = -1 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$ (thỏa điều kiện)	0,25
	Với $t = 3$ ta có $x - \frac{2}{x} = 3 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$ (thỏa điều kiện) Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm $x = 1; x = -2; x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$.	0,25

4 (3,0 điểm)	Cho đường tròn $(O; R)$ và hai đường kính AB, CD vuông góc với nhau, M là điểm thuộc cung CD không chứa A của $(O; R)$ (M không trùng với hai điểm C và D). Đường thẳng AM cắt CD tại N. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CMN. Đường thẳng IM cắt đường tròn $(O; R)$ tại K. a) Chứng minh tam giác INC vuông cân tại I. Từ đó suy ra ba điểm I, B, C thẳng hàng.		1,0
		Ta lại có: $\widehat{AMC} = \frac{1}{2}\widehat{AOC}$ (cùng chắn $\widehat{AC}$ của (O)). $\widehat{NMC} = \frac{1}{2}\widehat{NIC}$ (cùng chắn $\widehat{NC}$ của (I)).	0,25
		Do đó $\widehat{NIC} = \widehat{AOC} = 90^\circ$. Suy ra $\triangle NIC$ vuông cân tại I.	0,25
		Vì $\triangle NIC$ vuông cân tại I nên $\widehat{NCI} = 45^\circ$.	0,25
		Mà $\widehat{OCB} = 45^\circ$ và hai điểm B, I nằm cùng phía đối với đường thẳng OC nên hai tia CB và CI trùng nhau. Vậy B, I, C thẳng hàng.	0,25
	b) Tính tỉ số $\frac{R^2 - OI^2}{IM \cdot IK}$.		1,0
	Gọi E, F là các giao điểm của đường thẳng OI với đường tròn (O). Ta có: $\widehat{KIF} = \widehat{MIE}$ (đối đỉnh), $\widehat{FEM} = \widehat{MKF}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{FM}$), Do đó $\triangle IEM$ đồng dạng với $\triangle IKF$ (g-g)		0,25
	$\Rightarrow \frac{IE}{IM} = \frac{IK}{IF}$		0,25
	$\Rightarrow IM \cdot IK = IE \cdot IF = (OE + OI)(OE - OI) = R^2 - OI^2.$		0,25
	Vậy $\frac{R^2 - OI^2}{IM \cdot IK} = 1$.		0,25
	c) Tìm vị trí của điểm sao cho tích $IM \cdot IK$ có giá trị lớn nhất.		1,0
	Theo câu b) ta có: $IM \cdot IK = R^2 - OI^2$.		0,25
	Do đó: $IM \cdot IK$ lớn nhất $\Leftrightarrow R^2 - OI^2$ lớn nhất $\Leftrightarrow OI$ nhỏ nhất.		0,25
	Kẻ $OH \perp BC$ tại H. Ta có $OI \geq OH$ (OH không đổi).		0,25
	Do đó OI nhỏ nhất bằng OH khi và chỉ khi $I \equiv H$. Lúc đó $N \equiv O$ và $M \equiv B$.		0,25
5 (2,0 điểm)	a) Tìm tất cả các số nguyên x, y, z không âm thỏa mãn $xyz + xy + yz + zx + x + y + z = 2017.$		0,5
	Ta có $xyz + xy + yz + zx + x + y + z = 2017 \Leftrightarrow xy(z+1) + y(z+1) + x(z+1) + (z+1) = 2018$		0,25

$\Leftrightarrow (x+1)(y+1)(z+1) = 2018 = 2018.1.1 = 1009.2.1.$	
Không mất tổng quát, giả sử $x \geq y \geq z \geq 0$ nên $x+1 \geq y+1 \geq z+1 \geq 1$. Do đó chỉ có hai trường hợp xảy ra là $\begin{cases} x+1=2018 \\ y+1=1 \\ z+1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2017 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$	0,25
hoặc $\begin{cases} x+1=1009 \\ y+1=2 \\ z+1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1008 \\ y=1 \\ z=0 \end{cases}.$	0,25
Vậy các bộ số $(x;y;z)$ thỏa yêu cầu bài toán là: $(2017;0;0), (0;2017;0), (0;0;2017), (1008;1;0), (1008;0;1), (1;1008;0), (1;0;1008), (0;1;1008), (0;1008;1).$	0,25
a) Bên trong hình vuông cạnh bằng 1, lấy 9 điểm phân biệt tùy ý sao cho không có bất kỳ 3 điểm nào trong chúng thẳng hàng. Chứng minh rằng tồn tại 3 điểm trong số đó tạo thành một tam giác có diện tích không vượt quá $\frac{1}{8}$.	1,0
Chia hình vuông đã cho thành 4 hình vuông nhỏ cạnh bằng $\frac{1}{2}$. 	0,25
Trong 9 điểm đã cho, có ít nhất 3 điểm nằm trong một hình vuông nhỏ (có thể ở trên biên). Giả sử có 3 điểm A, B, C ở trong hình vuông nhỏ MNPQ.	0,25
Không mất tổng quát, giả sử A, B, C thì có thể xem theo hàng ngang từ trái sang phải, A ở giữa B và C (hình vẽ). Qua A vẽ đường thẳng vuông góc với MN cắt BC tại D. Vẽ BH và CK vuông góc với AD (H, K thuộc AD).	0,25
Ta có $S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ACD} = \frac{1}{2}BH.AD + \frac{1}{2}CK.AD = \frac{1}{2}(BH + CK)AD \leq \frac{1}{2}MN.MQ = \frac{1}{8}.$	0,25

----- Hết -----