

Câu 1. (2,0 điểm)

a. Giải phương trình: $|3x - 2| = 4x + 1$

b. Rút gọn biểu thức: $A = \frac{x + 2\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} + \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} - 2\sqrt{x}$

Câu 2. (2,0 điểm)

Cho phương trình $x^4 - 2mx^2 + 5m - 4 = 0$ (với m là tham số).

a. Giải phương trình khi $m = 5$.

b. Tìm m để phương trình có 4 nghiệm x_1, x_2, x_3, x_4 sao cho $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ và $T = 2(x_1^4 + x_2^4) - (x_3^4 + x_4^4) - 6x_1x_2x_3x_4$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 3. (1,0 điểm)

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 - (x - 1)\sqrt{y + 2} + 3x = 4 \\ \sqrt{x^2 + 8x + 13} + \sqrt{10 - y} = 3 \end{cases}$$

Câu 4. (1,0 điểm)

Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c \leq 3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{2018}{ab + bc + ca}$.

Câu 5. (3,0 điểm)

Cho đường tròn tâm O , từ A nằm ngoài đường tròn vẽ hai tiếp tuyến AB, AC (B, C là các tiếp điểm). Gọi E là giao điểm của OA và BC .

a. Chứng minh tứ giác $ABOC$ nội tiếp.

b. Chứng minh $BA \cdot BE = AE \cdot BO$

c. Gọi I là trung điểm của BE , đường thẳng qua I và vuông góc với OI cắt tia AB và AC theo thứ tự tại D và F . Chứng minh $\widehat{IDO} = \widehat{BCO}$ và tam giác DOF cân.

Câu 6. (1,0 điểm)

Cho tam giác ABC có hai đường phân giác trong BD và CE . Điểm M bất kì trên đoạn DE . Gọi H, K, L lần lượt là hình chiếu của M trên BC, CA, AB . Chứng minh rằng $MK + ML = MH$.

-----**HẾT**-----

Họ và tên thí sinh:..... Số báo danh:.....

Ghi chú: Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

BÀI GIẢI SƠ LƯỢC

Câu 1. (2,0 điểm)

$$a) |3x-2|=4x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2=4x+1 \left(x \geq \frac{2}{3} \right) \\ 2-3x=4x+1 \left(x < \frac{2}{3} \right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \left(x \geq \frac{2}{3} \right) \\ x=\frac{1}{7} \left(x < \frac{2}{3} \right) \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{1}{7}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{ \frac{1}{7} \right\}$

b) ĐK: $x \geq 0, x \neq 1$

$$\text{Ta có: } A = \frac{x+2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} + \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} - 2\sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}+1} + \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1} - 2\sqrt{x} \\ = \sqrt{x}+1 + \sqrt{x}+1 - 2\sqrt{x} = 2$$

Câu 2. (2,0 điểm)

a) Khi $m = 5$, phương trình trở thành:

$$x^4 - 10x^2 + 21 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 3)(x^2 - 7) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 3 \\ x^2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{3} \\ x = \pm\sqrt{7} \end{cases}$$

Vậy khi $m = 5$, phương trình có 4 nghiệm phân biệt là $x_{1,2} = \pm\sqrt{3}; x_{3,4} = \pm\sqrt{7}$

b) Đặt $t = x^2, t \geq 0$. Phương trình đã cho trở thành: $t^2 - 2mt + 5m - 4 = 0$ (*)

Phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt $x_1, x_2, x_3, x_4 \Leftrightarrow (*)$ có 2 nghiệm dương phân biệt

$$t_1, t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 5m + 4 > 0 \\ 5m - 4 > 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)(m-4) > 0 \\ m > \frac{4}{5} \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m > 4 \\ m > \frac{4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{5} < m < 1 \\ m > 4 \end{cases} (**)$$

Giả sử (*) có 4 nghiệm là $x_1 = -\sqrt{t_2}, x_2 = -\sqrt{t_1}, x_3 = \sqrt{t_1}, x_4 = \sqrt{t_2}$ ($x_1 < x_2 < x_3 < x_4; 0 < t_1 < t_2$)

$$\text{Khi đó } T = 2(x_1^4 + x_2^4) - (x_3^4 + x_4^4) - 6x_1x_2x_3x_4 = t_1^2 + t_2^2 - 6t_1t_2 = (t_1 + t_2)^2 - 8t_1t_2$$

$$T = 4m^2 - 8(5m - 4) = 4m^2 - 40m + 32 = (2m - 10)^2 - 68 \geq -68$$

Đẳng thức xảy ra $m = 5$ (thỏa mãn **). Vậy $\min T = -68 \Leftrightarrow m = 5$.

Câu 3. (1,0 điểm)

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} -2 \leq y \leq 10 \\ x^2 + 8x + 13 \geq 0 \end{cases} (*)$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} x^2 - (x-1)\sqrt{y+2} + 3x = 4(1) \\ \sqrt{x^2 + 8x + 13} + \sqrt{10-y} = 3(2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow (x^2 + 3x - 4) - (x-1)\sqrt{y+2} = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+4) - (x-1)\sqrt{y+2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x+4-\sqrt{y+2}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \sqrt{y+2} = x+4 \end{cases}$$

+) Với $x = 1$, thế vào (2) ta được $\sqrt{10-y} = 3 - \sqrt{22} < 0 \Rightarrow$ vô nghiệm

+) Với $\sqrt{y+2} = x+4 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -4 \\ x^2 + 8x = y - 14 \end{cases}$. Thế vào (2) $\sqrt{y-1} + \sqrt{10-y} = 3$.

Ta có $\sqrt{y-1} + \sqrt{10-y} = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq y \leq 10 \\ 9 + 2\sqrt{(y-1)(10-y)} = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = 10 \end{cases}$.

Khi $y = 1 \Rightarrow x = \sqrt{3} - 4 \Rightarrow x^2 + 8x + 13 = 0$ (thỏa mãn)

Khi $y = 10 \Rightarrow x = \sqrt{12} - 4 \Rightarrow x^2 + 8x + 13 = 9$ (thỏa mãn)

Vậy nghiệm $(x; y)$ của hệ là $(\sqrt{3} - 4; 1)$ và $(2\sqrt{3} - 4; 10)$.

Câu 4. (1,0 điểm)

Với mọi x, y, z dương ta có : $x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz}$ (1) và $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $(x + y + z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 9$ (3). Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z$.

Áp dụng (3) ta có: $(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca) \left(\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{ab + bc + ca} + \frac{1}{ab + bc + ca} \right) \geq 9$

$\Rightarrow \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{2}{ab + bc + ca} \geq \frac{9}{(a + b + c)^2} \geq 1$ (do $a + b + c \leq 3$)

Mặt khác $ab + bc + ca \leq \frac{(a + b + c)^2}{3} \leq 3 \Rightarrow \frac{1}{ab + bc + ca} \geq \frac{1}{3}$

Vậy $\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{2018}{ab + bc + ca} = \left(\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{2}{ab + bc + ca} \right) + \frac{2016}{ab + bc + ca} \geq 1 + \frac{2016}{3} = 673$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca \\ a = b = c \\ a + b + c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 1$.

Câu 5. (3,0 điểm)

a) Chứng minh tứ giác ABOC nội tiếp.

Ta có: $\widehat{ABO} = \widehat{ACO} = 90^\circ$. (Vì AB và AC là hai tiếp tuyến của (O))

Suy ra $\widehat{ABO} + \widehat{ACO} = 180^\circ$. Vậy tứ giác ABOC nội tiếp được đường tròn.

b) Chứng minh $BA \cdot BE = AE \cdot BO$

Ta có: $AB = AC$ (Vì AB và AC là hai tiếp tuyến của (O)), $OB = OC$ (bán kính)

Nên OA là trung trực của BC $\Rightarrow OA \perp BC$

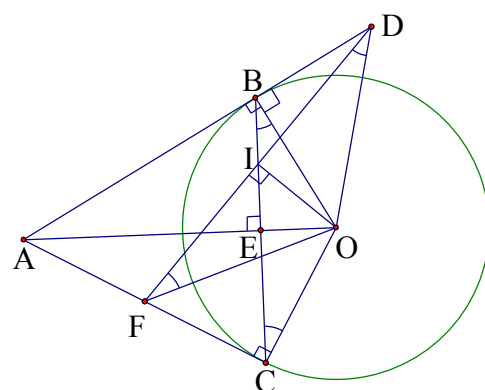
Xét $\triangle AEB$ và $\triangle BEO$, ta có

$\widehat{AEB} = \widehat{BEO} = 90^\circ$ ($OA \perp BC$), $\widehat{ABE} = \widehat{BOE}$ (vì cùng phụ với $\widehat{BAE}$).

Vậy $\triangle AEB \sim \triangle BEO \Rightarrow \frac{AB}{BO} = \frac{AE}{BE} \Rightarrow BA \cdot BE = AE \cdot BO$ (đpcm).

c) Chứng minh $\widehat{IDO} = \widehat{BCO}$ và tam giác DOF cân.

Vì $\widehat{OID} = \widehat{OBD} = 90^\circ \Rightarrow$ tứ giác BDOI nội tiếp $\Rightarrow \widehat{IDO} = \widehat{IBO}$ (1).



Vì tam giác OBC cân tại O nên $\widehat{IBO} = \widehat{BCO}$ (2). Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{IDO} = \widehat{BCO}$.

Tương tự ta cũng có tứ giác CFIO nội tiếp $\Rightarrow \widehat{BCO} = \widehat{IFO}$ (3)

Từ (1) và (3) suy ra $\widehat{IDO} = \widehat{IFO} \Rightarrow$ tam giác DOF cân tại O.

Câu 6. (1,0 điểm)

Gọi H, L, K lần lượt là hình chiếu của M trên các cạnh BC, AB, AC.

T, I lần lượt là hình chiếu của D trên các cạnh AB, BC;
N là hình chiếu của E trên cạnh AC; J là giao điểm của SD và MH.

Khi đó, $ML \parallel DT$; $MK \parallel EN$; $ES \parallel MH \parallel DI$.

Vì BD và CE là phân giác góc ABC, góc ACB nên $DT = DL$ và $ES = EN$.

Ta có:

$$MK \parallel EN \Rightarrow \frac{MK}{EN} = \frac{DM}{DE}; \quad MJ \parallel ES \Rightarrow \frac{MJ}{ES} = \frac{DM}{DE}.$$

$$\text{Do đó } \frac{MK}{EN} = \frac{MJ}{ES}, \quad EN = ES \Rightarrow MK = MJ \quad (1)$$

$$\text{Ta có } ML \parallel DT \Rightarrow \frac{ML}{DT} = \frac{EM}{ED}; \quad MJ \parallel ES \Rightarrow \frac{EM}{ED} = \frac{SJ}{SD}.$$

$$JH \parallel DI \Rightarrow \frac{SJ}{SD} = \frac{JH}{DI} \Rightarrow \frac{ML}{DT} = \frac{JH}{DI}, \quad DT = DI \Rightarrow ML = JH \quad (2)$$

Từ (1), (2) $\rightarrow MK + ML = MJ + JH = MH$ (đpcm).

-----**HẾT**-----

