TRƯỜNG THPT SƠN TÂY

ĐỀ THI THỬ VÀO LỚP 10 NĂM 2018
Môn thi: Toán
Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I. (2,0điểm) Cho biểu thức $A=\left[\frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6}-\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}-\frac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}}\right].\frac{x-3\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+1}$

(Với $x\ge 0; x\ne 4; x\ne 9.$)

1. Rút gọn biểu thức A.
2. Tính giá trị của biểu thức A khi $x=\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}$.
3. Tính giá trị lớn nhất của A.

Bài II. (2,0 điểm) *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình*

Một ô tô dự định đi từ A đến B trong khoảng thời gian nhất định. Biết rằng, nếu vận tốc giảm đi $10km/h$ thì ô tô đến B chậm hơn 96 phút so với dự định. Nếu vận tốc tăng thêm $20km/h$ thì ô tô đến sớm hơn dự định 2 giờ. Tính độ dài quãng đường AB.

Bài III. (2,0 điểm)

1. Giải hệ phương trình sau $\begin{cases}\dfrac{2}{x-1}+\sqrt{y+1}=0\\ \dfrac{3}{x-1}-2\sqrt{y+1}=-7\end{cases}$
2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho $(P)\, y=x^2$ và $(d)\, y=2(m-1)x-m^2+3m$
   a. Với m=3, tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d).
   b. Tìm m để (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật có diện tích bằng $\frac{7}{4}$.

Bài IV. (3,5 điểm) Cho đường tròn (O) đường kính AB cố định, điểm I nằm giữa A và O sao cho $AI=\frac{2}{3}AO$. Kẻ dây cung MN vuông góc với AB tại I, gọi C là điểm tùy ý thuộc cung lớn MN sao cho C không trùng với M,N và B. Nối AC cắt MN tại E.

1) Chứng minh 4 điểm I,E,C,B cùng thuộc một đường tròn.

2) Chứng minh hai tam giác AME và ACM đồng dạng.

3) Chứng minh $AE.AC-AI.IB=AI^2$

4) Hãy xác định vị trí của điểm C sao cho khoảng cách từ N đến tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CME là nhỏ nhất?

Bài V. (0,5 điểm) Cho các số dương a,b,c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}$

Hướng dẫn giải

Bài I. (2,0điểm) Cho biểu thức $A=\left[\frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6}-\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}-\frac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}}\right].\frac{x-3\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+1}$ (Với $x\ge 0; x\ne 4; x\ne 9.$)

4. Rút gọn biểu thức A.
5. Tính giá trị của biểu thức A khi $x=\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}$.
6. Tính giá trị lớn nhất của A.

Hướng dẫn giải

1. Với $x\ge 0; x\ne 4; x\ne 9$ Ta có:

$$A=\left[\frac{2\sqrt{x}-9}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)}-\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}+\frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}\right].\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x})^3+1}$$

$$=\left[\frac{(2\sqrt{x}-9)-(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)+(2\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)}\right].\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x})^3+1}$$

$$=\left[\frac{2\sqrt{x}-x+2\text{x}-3\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)}x\right].\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x})^3+1}$$

$$=\left[\frac{x-\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)}\right]\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x})^3+1}=\frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)}.\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}=\frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}$$

Vậy $A=\frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1}$ với $x\ge 0; x\ne 4; x\ne 9$.

2. Ta có:

$3+2\sqrt{2}=1+2\sqrt{2}+2=\left(1+\sqrt{2}\right)^2$

$11-6\sqrt{2}=9-2.3.\sqrt{2}+2=\left(3-\sqrt{2}\right)^2$

$x=\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}+12=1+\sqrt{2}+3-\sqrt{2}+12=4+12=16$

Nên $A=\frac{\sqrt{16}}{16-\sqrt{16}+1}=\frac{4}{13}$.

3. Khi x = 0 ta có A = 0.

Khi $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$ ta có: $A = \dfrac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1} = \dfrac{1}{\sqrt{x}-1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}$

Áp dụng bất đẳng thức Cosi ta có:

$$\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}} \geq 2 \leftrightarrow \sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}-1 \geq 1 \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}-1} \leq 1 \leftrightarrow A \leq 1$$

Dấu "=" xảy ra khi $\sqrt{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \leftrightarrow x = 1(TM)$.

Vậy max A = 1 khi x = 1.

Bài II. (2,0 điểm) *Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình*

Một ô tô dự định đi từ A đến B trong khoảng thời gian nhất định. Biết rằng, nếu vận tốc giảm đi 10km/h thì ô tô đến B chậm hơn 96 phút so với dự định. Nếu vận tốc tăng thêm 20km/h thì ô tô đến sớm hơn dự định 2 giờ. Tính độ dài quãng đường AB.

Hướng dẫn giải

96 phút $= \dfrac{8}{5}$ (h)

Gọi thời gian dự định đi từ A đến B là x $(x > 2)$ (h)

Gọi vận tốc dự định là y $(y > 10)$ (km/h)

Quãng đường AB là xy

Vận tốc giảm đi 10 km/h là $y - 10$ (km/h)

Thì ô tô đến B chậm hơn 96 phút nên thời gian đi là $x + \dfrac{8}{5}$ (h)

Vận tốc tăng thêm 20km/h là $y + 20$ (km/h)

Thì ô tô đến B nhanh hơn dự định 2 h nên thời gian đi là $x - 2$ (h)

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}(y-10)\left(x+\dfrac{8}{5}\right) = xy \\ (y+20)(x-2) = xy\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-10x+\dfrac{8}{5}y = 16 \\ 20x - 2y = 40\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = 8 \\ y = 60\end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy độ dài quãng đường AB là 480km

Bài III. (2,0 điểm)

1. Giải hệ phương trình sau $\begin{cases} \dfrac{2}{x-1}+\sqrt{y+1}=0 \\ \dfrac{3}{x-1}-2\sqrt{y+1}=-7 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

ĐK: $x \neq 1; y \geq -1$

Đặt $a=\dfrac{1}{x-1}(a \neq 0); b=\sqrt{y+1}(b \geq 0)$

Hệ đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b=0 \\ 3a-2b=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a+2b=0 \\ 3a-2b=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7a=-7 \\ 2a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=2 \end{cases} (TM)$

Với $\begin{cases} a=-1 \\ b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x-1}=-1 \\ \sqrt{y+1}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=-1 \\ y+1=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=3 \end{cases} (TM)$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(0;3)$.

2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho $(P) y=x^2$ và $(d) y=2(m-1)x-m^2+3m$
   c. Với m=3, tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d).
   d. Tìm m để (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật có diện tích bằng $\dfrac{7}{4}$.

Hướng dẫn giải

Xét phương trình hoành độ của (P) và (d) ta có:

$x^2=2(m-1)x-m^2+3m \Leftrightarrow x^2-2(m-1)x+m^2-3m=0(*)$

a. Với m=3 phương trình (*) có dạng $x^2-4x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \Rightarrow y=0 \\ x=4 \Rightarrow y=16 \end{array}\right.$

   Vậy m=3 thì (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt $A(0,0); B(4,16)$

b. Để (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt có hoành độ là chiều dài và chiều rông của hình chữ nhật có diện tích bằng $\dfrac{7}{4}$ khi phương trình (*) có 2 nghiệm dương phân biệt $0<x_1<x_2$ thỏa mãn $x_1.x_2=\dfrac{7}{4}$

   Phương trình (*) có 2 nghiệm dương phân biệt khi $\begin{cases} \Delta' >0 \\ S>0 \\ P>0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[-(m-1)^2\right]-(m^2-3m)>0 \\ 2(m-1)>0 \\ m^2-3m>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+1>0 \\ m>1 \\ m(m-3)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>1 \\ m>3 \end{cases} \Leftrightarrow m>3\ (1)$$

$$x_1.x_2=\frac{7}{4} \Leftrightarrow m^2-3m=\frac{7}{4} \Leftrightarrow 4m^2-12m-7=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\frac{7}{2} \\ m=\frac{-1}{2} \end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện (1) thì $m=\frac{7}{2}$ là giá trị cần tìm.

Bài IV. (3,5 điểm) Cho đường tròn (O) đường kính AB cố định, điểm I nằm giữa A và O sao cho $AI=\frac{2}{3}AO$. Kẻ dây cung MN vuông góc với AB tại I, gọi C là điểm tùy ý thuộc cung lớn MN sao cho C không trùng với M,N và B. Nối AC cắt MN tại E.

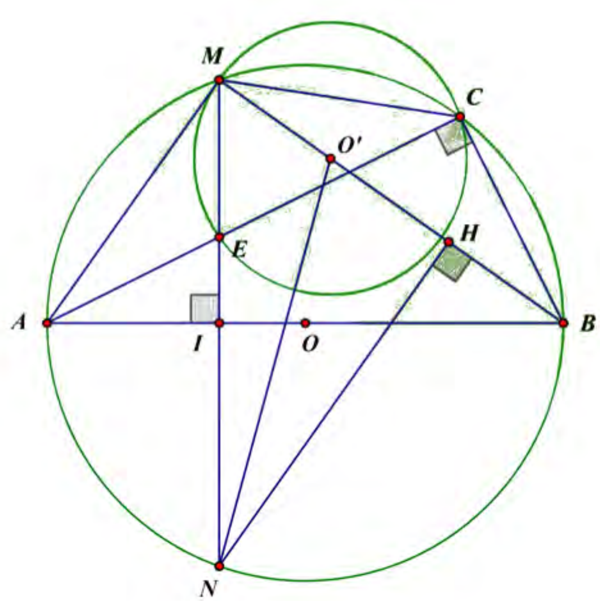
1) Chứng minh 4 điểm I,E,C,B cùng thuộc một đường tròn.

2) Chứng minh hai tam giác AME và ACM đồng dạng.

3) Chứng minh $AE.AC-AI.IB=AI^2$

4) Hãy xác định vị trí của điểm C sao cho khoảng cách từ N đến tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CME là nhỏ nhất?

Hướng dẫn giải



1) Ta có $\widehat{EIB} = \widehat{ECB} = 90^0$

Nên tứ giác $EIBC$ là tứ giác nội tiếp (theo dấu hiệu: "tứ giác có tổng 2 góc đối bằng 180^0 là tứ giác nội tiếp")

2) Vì $MN \perp AB$ và AB là đường kính của (O) nên A là điểm chính giữa của cung MN nhỏ hay $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{AN}$

Suy ra $\widehat{AME} = \widehat{MCA}$ (vì hai góc nội tiếp của (O) chắn hai cung bằng nhau).

Do đó $\Delta AME \backsim \Delta ACM$ (g – g) (1)

3) Từ (1) suy ra $\dfrac{AE}{AM} = \dfrac{AM}{AC} \Rightarrow AE.AC = AM^2 \ (2)$

Tam giác AMB vuông tại M, có MI là đường cao nên $AI.IB = MI^2 \ (3)$

Từ (2) và (3) suy ra $AE.AC - AI.IB = AM^2 - MI^2 = AI^2$

4) Gọi O' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CME.

Theo ý 2) ta có $\widehat{AME} = \widehat{MCE}$

Mà sđ $\widehat{MCE} =$ sđ $\dfrac{\overset{\frown}{ME}}{2}$ ($\overset{\frown}{ME}$ là cung trên (O')). Do đó sđ $\widehat{AME} =$ sđ $\dfrac{\overset{\frown}{ME}}{2}$

Suy ra AM là tiếp tuyến của đường tròn (O') (theo định lý đảo về góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung).

Mà $MA \perp MB$ nên $O' \in MB$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của N lên MB

Ta có $NO' \geq NH$ nên NO' nhỏ nhất khi $O' \equiv H$

Khi đó C là giao điểm thứ hai của hai đường tròn (O) và $(H; HM)$.

Bài V. (0,5 điểm) Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:
$$P = \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b}$$

Hướng dẫn giải

Ta có $P = \dfrac{ab}{c} + \dfrac{bc}{a} + \dfrac{ca}{b} \Rightarrow P^2 = \dfrac{a^2b^2}{c^2} + \dfrac{b^2c^2}{a^2} + \dfrac{c^2a^2}{b^2} + 2\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$

Áp dụng bất đẳng thức Cô si với các số dương ta có:

$$\frac{a^2b^2}{c^2}+\frac{b^2c^2}{a^2}\ge 2b^2$$

$$\frac{b^2c^2}{a^2}+\frac{c^2a^2}{b^2}\ge 2c^2$$

$$\frac{a^2b^2}{c^2}+\frac{c^2a^2}{b^2}\ge 2a^2$$

Cộng các bất đẳng thức theo vế ta có:

$P^2\ge 4\left(a^2+b^2+c^2\right)\Leftrightarrow P^2\ge 4\Rightarrow P\ge 2$

Vậy $P_{\min}=2$ khi $a=b=c=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$