

Bài 1 (2,0 điểm): Cho biểu thức $A = \frac{4}{2\sqrt{x}-x}$ và $B = \frac{\sqrt{x}-4}{x-2\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{x}-2}$ với $x > 0, x \neq 4$.

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 2$.

2) Rút gọn $P = B : A$.

3) Tìm x để $M \geq 0$ với $M = P \cdot \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}$.

Bài 2 (2,5 điểm):

1) Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:

Hai địa điểm A và B cách nhau 30 km . Cùng lúc, một người đi xe máy khởi hành từ A , một người đi xe đạp khởi hành từ B . Nếu đi ngược chiều thì sau 40 phút họ gặp nhau. nếu đi cùng chiều theo hướng từ A đến B thì sau 2 giờ họ gặp nhau tại địa điểm C (B ở giữa A và C). Tính vận tốc mỗi xe.

2) Một hình trụ có chiều cao bằng đường kính đáy, diện tích toàn phần của hình trụ là $48\pi\text{ (cm}^2\text{)}$. Tính thể tích hình trụ đó.

Bài 3 (2,0 điểm):

1) Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} \frac{2}{x-2y} + \sqrt{y-1} = 3 \\ \frac{3}{x-2y} - 2\sqrt{y-1} = 1 \end{cases}$$
.

2) Cho parabol $(P) : y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $(d) : y = (m+1)x - m$ (m là tham số, x là ẩn số).

a) Chứng minh (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt với mọi m .

b) Gọi $x_1; x_2$ là hoành độ giao điểm của (d) và (P) . Tìm m để $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{2}$.

Bài 4(3,0 điểm): Cho nửa đường tròn $(O;R)$ đường kính BC . Lấy điểm D và E di động trên nửa đường tròn sao cho $\widehat{EOD} = 90^\circ$ (D thuộc $\widehat{CE}$, E thuộc $\widehat{BD}$); BD cắt CE tại H , các tia BE và CD cắt nhau tại A .

a) Chứng minh tứ giác $ADHE$ nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh OD là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ADHE$.

c) Kẻ đường thẳng vuông góc với AB tại B và đường thẳng vuông góc với AC tại C . Gọi K là giao điểm hai đường thẳng này và I là trung điểm AK . Tính số đo góc BIC .

d) Tìm vị trí điểm D và E trên nửa đường tròn $(O;R)$ để $AB + AC$ lớn nhất.

Bài 5 (0,5 điểm): Cho các số $x; y$ thỏa mãn $x^2 + 2xy + 3y^2 = 6$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $M = x + 2y$.

-----HẾT-----

HƯỚNG DẪN

Bài 1 (2,0 điểm) Cho biểu thức $A = \frac{4}{2\sqrt{x}-x}$ và $B = \frac{\sqrt{x}-4}{x-2\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{x}-2}$ với $x > 0, x \neq 4$

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 2$

2) Rút gọn $P = B : A$

3) Tìm x để $M \geq 0$ với $M = P \cdot \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}$

Lời giải

1) Khi $x = 2$ (tm) thay vào A ta có :

$$A = \frac{4}{2\sqrt{2}-2} = \frac{4}{2(\sqrt{2}-1)} = \frac{2}{\sqrt{2}-1} = \frac{2 \cdot (\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1) \cdot (\sqrt{2}+1)} = 2\sqrt{2} + 2$$

Vậy khi $x = 2$ thì $A = 2\sqrt{2} + 2$

$$2) B = \frac{\sqrt{x}-4}{x-2\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{x}-2}$$

$$B = \frac{\sqrt{x}-4+3\sqrt{x}}{\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x}-2)}$$

$$B = \frac{4\sqrt{x}-4}{\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x}-2)}$$

$$B = \frac{4(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x}-2)}$$

$$P = B : A$$

$$P = \frac{4(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x}-2)} : \frac{4}{\sqrt{x}(2-\sqrt{x})}$$

$$P = \frac{4(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x}-2)} \cdot \frac{-\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x}-2)}{4}$$

$$P = 1 - \sqrt{x}$$

$$3) M = P \cdot \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} = (1-\sqrt{x}) \cdot \frac{(1-\sqrt{x})}{\sqrt{x}-3} = \frac{(1-\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}-3}$$

$$M \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(1-\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}-3} \geq 0 \quad (\text{điều kiện } x \neq 9)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}-3 > 0 \quad (\text{Vì } (1-\sqrt{x})^2 \geq 0 \text{ với } x > 0, x \neq 4, x \neq 9)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} > 3$$

$$\Leftrightarrow x > 9 \text{ (TMĐK)}$$

Vậy với $x > 9$ thì $M \geq 0$.

Bài 2. (2,5 điểm)

1) Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình.

Hai địa điểm A và B cách nhau 30 km . Cùng lúc một người đi xe máy khởi hành từ A , một người đi xe đạp khởi hành từ B . Nếu đi ngược chiều thì sau 40 phút họ gặp nhau. nếu đi cùng chiều theo hướng từ A đến B thì sau 2 giờ họ gặp nhau tại C (B ở giữa A và C). Tính vận tốc mỗi xe.

Lời giải

Gọi vận tốc người đi xe máy khởi hành từ A , vận tốc người đi xe đạp khởi hành từ B lần lượt là $x; y \text{ (km/h)}$ $x > 0; y > 0$.

Khi 2 người đi ngược chiều gặp nhau:

Quãng đường người đi từ A sau 40 phút $= \frac{2}{3}$ giờ gặp nhau là: $\frac{2}{3}x \text{ (km)}$.

Quãng đường người đi từ B sau 40 phút $= \frac{2}{3}$ giờ gặp nhau là: $\frac{2}{3}y \text{ (km)}$.

Ta có phương trình: $\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y = 30 \quad (1)$

Khi 2 người đi cùng chiều gặp nhau:

Quãng đường người đi từ A đến C sau 2 giờ là $2x \text{ (km)}$, Quãng đường người đi từ B đến C sau 2 giờ là $2y \text{ (km)}$. Vì hai địa điểm A và B cách nhau 30 km , nên ta có phương trình: $2x - 30 = 2y \quad (2)$.

Giải hệ phương trình $\begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y = 30 & (1) \\ 2x - 30 = 2y & (2) \end{cases}$. Ta được $\begin{cases} x = 30 \text{ (tm)} \\ y = 15 \text{ (tm)} \end{cases}$.

Vậy vận tốc một người đi xe máy khởi hành từ A là 30 km/h , vận tốc một người đi xe đạp khởi hành từ B là 15 km/h .

2) Một hình trụ có chiều cao bằng đường kính đáy, diện tích toàn phần của hình trụ là $48\pi \text{ (cm}^2\text{)}$. Tính thể tích hình trụ đó.

Lời giải

Ta có $h = 2r$.

Diện tích toàn phần hình trụ $2\pi r(h + r) = 6\pi r^2 = 48\pi \text{ (cm}^2\text{)} \Rightarrow r^2 = 8 \Rightarrow r = 2\sqrt{2} \text{ (cm)}$.

Thể tích hình trụ là: $\pi r^2 h = \pi \cdot 8 \cdot 2 \cdot 2\sqrt{2} = 32\sqrt{2} \text{ (cm}^3\text{)}$.

Bài 3. (2,0 điểm)

1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \frac{2}{x-2y} + \sqrt{y-1} = 3 \\ \frac{3}{x-2y} - 2\sqrt{y-1} = 1 \end{cases}$

2) Cho parabol $(P) : y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $(d) : y = (m+1)x - m$ (m là tham số, x là ẩn số)

a) Chứng minh (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt với mọi m .

b) Gọi $x_1 ; x_2$ là hoành độ giao điểm của (d) và (P) . Tìm m để $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{2}$

Lời giải

1) Điều kiện xác định: $\begin{cases} x \neq 2y \\ y \geq 1 \end{cases}$

Với điều kiện, hệ phương trình đã cho tương đương:

$$\begin{cases} \frac{4}{x-2y} + 2\sqrt{y-1} = 6 \\ \frac{3}{x-2y} - 2\sqrt{y-1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{7}{x-2y} = 7 \\ \frac{3}{x-2y} - 2\sqrt{y-1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=1 \\ \frac{3}{x-2y} - 2\sqrt{y-1} = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2y+1 \\ 3-2\sqrt{y-1}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y+1 \\ \sqrt{y-1}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y+1 \\ y-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=2 \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = (5; 2)$.

2) Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng (d) và parabol (P) :

$$\frac{1}{2}x^2 = (m+1)x - m \Leftrightarrow x^2 - 2(m+1)x + 2m = 0 \quad (1)$$

Ta có $\Delta' = [-(m+1)]^2 - 2m = m^2 + 1 > 0 \forall m$ nên phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt.

Do đó (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt với mọi m .

b) Theo kết quả câu a) ta có (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ giao điểm là $x_1 ; x_2$ với mọi m

$$\text{Áp dụng hệ thức Vi-et ta có : } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+1) \\ x_1 \cdot x_2 = 2m \end{cases}$$

$$\text{Điều kiện để } \sqrt{x_1} ; \sqrt{x_2} \text{ có nghĩa là } \begin{cases} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}.$$

Vì $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{2}$ nên $x_1 ; x_2$ không đồng thời bằng 0

$$\text{Suy ra } \begin{cases} x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 \cdot x_2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(m+1) > 0 \\ 2m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 0$$

Theo đề bài ta có : $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1 x_2} = 2$$

$$\Leftrightarrow 2(m+1) + 2\sqrt{2m} = 2$$

$$\Leftrightarrow m + \sqrt{2} \cdot \sqrt{m} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{m}(\sqrt{m} + \sqrt{2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{m} = 0 \text{ (Vì } m \geq 0 \text{ nên } \sqrt{m} + \sqrt{2} > 0)$$

$$\Leftrightarrow m = 0 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy $m = 0$ là giá trị cần tìm.

Bài 4. (3,0 điểm)

Cho nửa đường tròn $(O; R)$ đường kính BC . Lấy điểm D và E di động trên nửa đường tròn sao cho $\widehat{EOD} = 90^\circ$ (D thuộc $\widehat{CE}$, E thuộc $\widehat{BD}$); BD cắt CE tại H , các tia BE và CD cắt nhau tại A .

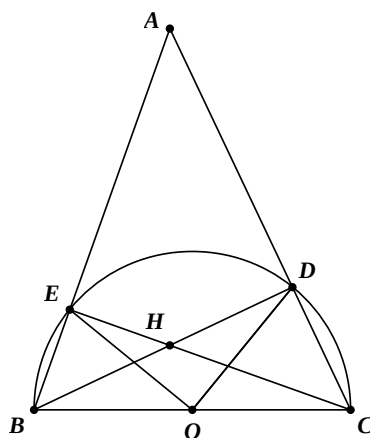
a) Chứng minh tứ giác $ADHE$ nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh OD là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ADHE$.

c) Kẻ đường thẳng vuông góc với AB tại B và đường thẳng vuông góc với AC tại C . Gọi K là giao điểm hai đường thẳng này và I là trung điểm AK . Tính số đo góc BIC .

d) Tìm vị trí điểm D và E trên nửa đường tròn $(O; R)$ để $AB + AC$ lớn nhất.

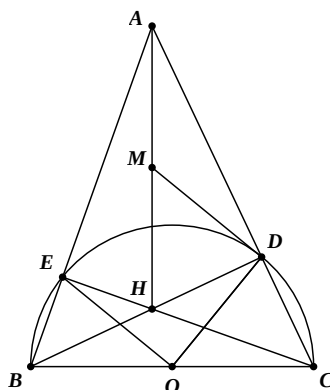
Lời giải



a) Chứng minh tứ giác $ADHE$ nội tiếp đường tròn.

Ta có $\widehat{BEC} = \widehat{BDC} = 90^\circ$ (các góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{AEH} = \widehat{ADH} = 90^\circ$ (kề bù với các góc vuông); Tứ giác $ADHE$ có $\widehat{AEH} = \widehat{ADH} = 90^\circ$ nên nội tiếp đường tròn đường kính AH .

b) Chứng minh OD là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ADHE$.



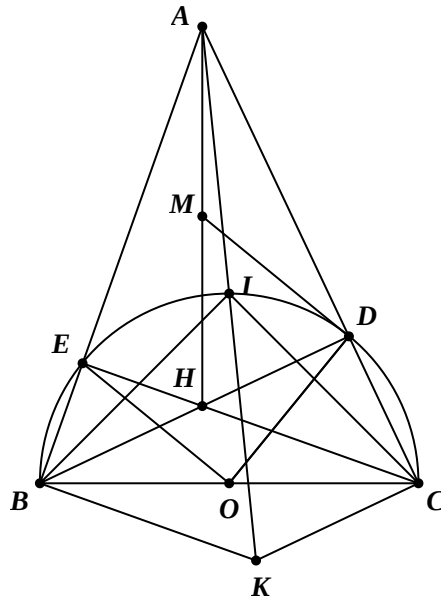
Gọi M là trung điểm $AH \Rightarrow M$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ADHE \Rightarrow MD = MA \Rightarrow \triangle MDA$ cân tại $M \Rightarrow \widehat{MDA} = \widehat{MAD}$;

$\triangle ODC$ cân tại $O \Rightarrow \widehat{ODC} = \widehat{OCD}$;

Vì $\widehat{BEC} = \widehat{BDC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow CE \perp AB; BD \perp AC \Rightarrow \triangle ABC$ có hai đường cao BD, CE cắt nhau tại $H \Rightarrow H$ là trực tâm của $\triangle ABC \Rightarrow AH$ cũng là đường cao của $\triangle ABC \Rightarrow AH \perp BC \Rightarrow \widehat{ODC} + \widehat{MDA} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{ODC} + \widehat{MDA} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{ODM} = 180^\circ - (\widehat{ODC} + \widehat{MDA}) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ \Rightarrow OD \perp MD$ tại $D \Rightarrow OD$ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ADHE$.

c) Kẻ đường thẳng vuông góc với AB tại B và đường thẳng vuông góc với AC tại C . Gọi K là giao điểm hai đường thẳng này và I là trung điểm AK . Tính số đo góc BIC .



Ta có $\widehat{ABK} = \widehat{ACK} = 90^\circ (GT) \Rightarrow$ tứ giác $ABKC$ nội tiếp đường tròn đường kính AK có tâm I là trung điểm của $AK \Rightarrow \widehat{BIC} = 2.\widehat{BAC}$;

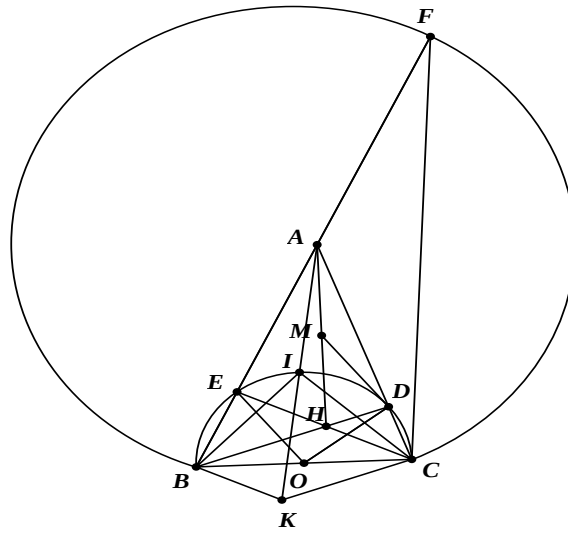
$\widehat{DOE} = 90^\circ (GT) \Rightarrow sd \widehat{DE} = 90^\circ$;

$\widehat{BAC}$ là góc có đỉnh ngoài đường tròn $\Rightarrow \widehat{BAC} = \frac{1}{2}(sd \widehat{BC} - sd \widehat{DE}) = \frac{1}{2}(180^\circ - 90^\circ) = 45^\circ$;

$\Rightarrow \widehat{BIC} = 2.\widehat{BAC} = 2.45^\circ = 90^\circ$;

Vậy $\widehat{BIC} = 90^\circ$.

d) Tìm vị trí điểm D và E trên nửa đường tròn $(O; R)$ để $AB + AC$ lớn nhất.



Trên tia đối của tia AB lấy điểm F sao cho $AF = AC \Rightarrow \triangle AFC$ cân tại $A \Rightarrow \widehat{AFC} = \widehat{ACF}$
 có $\widehat{BAC} = 45^\circ$ là góc ngoài của $\triangle AFC \Rightarrow \widehat{BAC} = 2.\widehat{AFC} \Rightarrow \widehat{AFC} = \frac{\widehat{BAC}}{2} = \frac{45^\circ}{2} = 22,5^\circ$;

Điểm F nhìn đoạn BC cố định dưới góc $22,5^\circ$ không đổi nên điểm F thuộc cung chứa góc $22,5^\circ$ dựng trên đoạn BC cố định, từ đó $AB + AC = AB + AF = BF$ lớn nhất khi BF là đường kính của cung tròn này $\Rightarrow \widehat{BCF} = 90^\circ \Rightarrow \triangle FBC$ vuông tại C mà $AF = AC \Rightarrow AF = AC = AB \Rightarrow \triangle ABC$ cân tại $A \Rightarrow A, H, I, O$ thẳng hàng $\Rightarrow D, E$ lần lượt là điểm chính giữa các cung: $\widehat{IC}, \widehat{IB}$.

Với I là điểm chính giữa $\widehat{BC}$, $AB + AC$ lớn nhất khi D, E lần lượt là điểm chính giữa các cung: $\widehat{IC}, \widehat{IB}$.

Bài 5. (0,5 điểm) Cho các số $x; y$ thỏa mãn $x^2 + 2xy + 3y^2 = 6$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $M = x + 2y$.

Lời giải

$$M = x + 2y \Rightarrow x = M - 2y$$

$$x^2 + 2xy + 3y^2 = 6 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow (M - 2y)^2 + 2(M - 2y)y + 3y^2 = 6$$

$$\Leftrightarrow M^2 - 4My + 4y^2 + 2My - 4y^2 + 3y^2 = 6$$

$$\Leftrightarrow 3y^2 - 2My + M^2 - 6 = 0 \quad (*)$$

Để (1) thỏa mãn thì (*) có nghiệm

$$\Leftrightarrow M^2 - 3(M^2 - 6) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -2M^2 + 18 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -3 \leq M \leq 3$$

GTNN $\min M = -3$ khi $x = -1; y = -1$

GTLN $\max M = 3$ khi $x = 1; y = 1$