

Câu 1 (1.0 điểm). Không sử dụng máy tính cầm tay, rút gọn biểu thức

$$P = \frac{3\sqrt{5} - \sqrt{27}}{\sqrt{3} - \sqrt{5}} - \sqrt{(3 - \sqrt{12})^2}$$

Câu 2 (1.0 điểm). Không sử dụng máy tính cầm tay, giải phương trình sau

$$-4x^2 + 8x + 2021 = 0.$$

Câu 3 (1.0 điểm). Cho hàm số bậc nhất $y = (m - 1)x + 1, (m \neq 1)$. Tìm giá trị của m để đồ thị hàm số đã cho đi qua điểm $A(2020; 2021)$. Với giá trị của m vừa tìm được thì hàm số đã cho là hàm số đồng biến hay nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

Câu 4 (1.0 điểm). Parabol (P): $y = -\frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $y = (2 - 3m)x + m - 1$ cắt nhau tại điểm B có tung độ bằng -2 và có hoành độ dương. Tìm giá trị của m .

Câu 5 (1.0 điểm). Cho biểu thức

$$Q = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} - \frac{1}{x - \sqrt{x}} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x} + 1} + \frac{2}{x - 1} \right) \text{ với } x > 0 \text{ và } x \neq 1.$$

a. Rút gọn Q ;

b. Tính giá trị của biểu thức Q khi $x = 3 + 2\sqrt{2}$.

Câu 6 (1.0 điểm). Cần cho thêm bao nhiêu gam đường vào 1200g dung dịch chứa 144g đường để nồng độ dung dịch tăng thêm 8%.

Câu 7 (1.0 điểm). Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH (H thuộc BC). Biết $BH = 9\text{cm}$, $AB = 15\text{cm}$. Tính CH , AC .

Câu 8 (1.0 điểm). Cho tứ giác $ABCD$ có AC vuông góc với BD , $AC = 8\text{cm}$, $BD = 6\text{cm}$. Gọi E , F , G , H theo thứ tự là trung điểm của AB , BC , CD , DA . Chứng minh rằng bốn điểm E , F , G , H thuộc cùng một đường tròn, tính bán kính của đường tròn đó.

Câu 9 (1.0 điểm). Cho tam giác ABC cân tại A . Vẽ đường tròn $(O; R)$ tiếp xúc với AB , AC tại B , C . Một điểm M bất kỳ nằm trên cạnh BC , vẽ đường thẳng vuông góc với OM cắt tia AB , AC lần lượt tại D , E . Chứng minh tam giác ODE cân.

Câu 10 (1.0 điểm). Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ với $R > R'$ cắt nhau tại hai điểm A , B . Kẻ tiếp tuyến chung DE của hai đường tròn (D thuộc (O) , E thuộc (O')) sao cho B gần tiếp tuyến hơn so với A . Gọi M là giao điểm của AB và DE .

a. Chứng minh rằng $MD^2 = ME^2 = MA \cdot MB$;

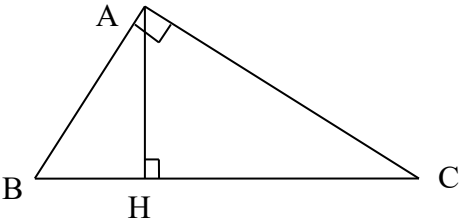
b. Đường thẳng EB cắt AD tại P , đường thẳng DB cắt AE tại Q . Chứng minh rằng PQ song song với DE .

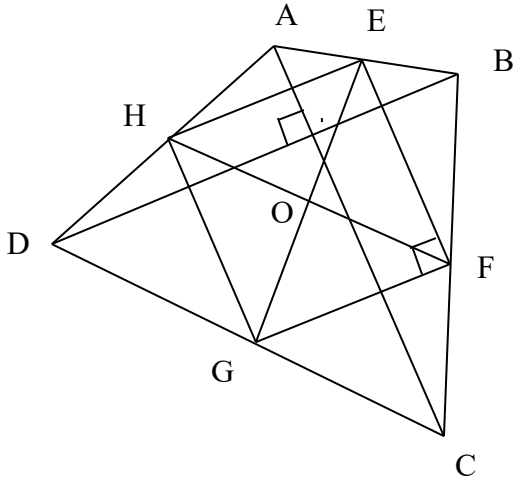
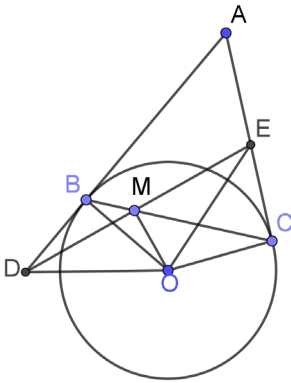
-----Hết-----

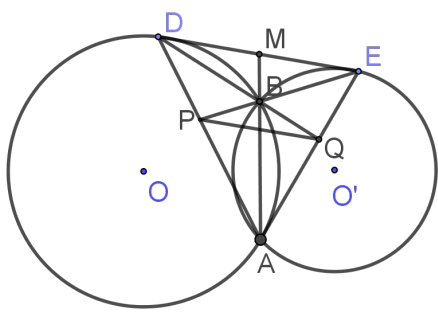
(Giám thị coi thi không giải thích gì thêm, thí sinh không được sử dụng tài liệu)

Họ và tên thí sinh:.....Số báo danh:.....

Câu	Nội dung	Điểm
1 (1điểm)	$P = \frac{3\sqrt{5} - \sqrt{27}}{\sqrt{3} - \sqrt{5}} - \sqrt{(3 - \sqrt{12})^2} = \frac{3\sqrt{5} - 3\sqrt{3}}{\sqrt{3} - \sqrt{5}} - 3 - \sqrt{12} $	0,25đ
	$= \frac{3(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{\sqrt{3} - \sqrt{5}} - (\sqrt{12} - 3)$	0,25đ
	$= \frac{-3(\sqrt{3} - \sqrt{5})}{\sqrt{3} - \sqrt{5}} - 2\sqrt{3} + 3$	0,25đ
	$= -3 - 2\sqrt{3} + 3 = -2\sqrt{3}. \text{ Vậy } P = -2\sqrt{3}$	0,25đ
2 (1điểm)	Phương trình $-4x^2 + 8x + 2021 = 0$ có $\Delta' = (-4)^2 - (-4).2021 = 8100 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = 90$ (Chú ý: có thể tính Δ)	0,25đ
	Suy ra phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = \frac{-4 - 90}{-4} = \frac{47}{2}; \quad x_2 = \frac{-4 + 90}{-4} = -\frac{43}{2}$	0,5đ
	Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x_1 = \frac{47}{2}; x_2 = -\frac{43}{2}$	0,25đ
3 (1điểm)	Đồ thị hàm số $y = (m - 1)x + 1, (m \neq 1)$ đi qua điểm A(2020;2021) nên $2021 = (m - 1).2020 + 1$	0,25đ
	$\Leftrightarrow 2021 = 2020m - 2019 \Leftrightarrow m = 2$	0,5đ
	Với $m = 2$ ta có hàm số $y = x + 1$, có hệ số $a = 1 > 0$ nên hàm số đồng biến trên tập $\mathbb{R}$	0,25đ
4 (1điểm)	Theo đầu bài (P) đi qua điểm B có tung độ bằng -2 nên $-2 = -\frac{1}{2}x^2 \Leftrightarrow x^2 = 4$	0,25đ
	Do điểm B có hoành độ dương nên B(2;-2)	0,25đ
	Đường thẳng $y = (2 - 3m)x + m - 1$ cũng đi qua điểm B(2;-2) nên $-2 = (2 - 3m).2 + m - 1$	0,25đ
	$\Leftrightarrow -5m = -5 \Leftrightarrow m = 1$ Vậy với $m = 1$ thì (P): $y = -\frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $y = (2 - 3m)x + m - 1$ cắt nhau tại điểm B có tung độ bằng -2 và có hoành độ dương.	0,25đ

5a (0,5điểm)	Với $x > 0$ và $x \neq 1$, ta có $Q = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \right)$ $Q = \left(\frac{x-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \right)$	0,25đ
	$Q = \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \right) \cdot (\sqrt{x}-1) = \frac{x-1}{\sqrt{x}}$	0,25đ
5b (0,5điểm)	Với $x = 3 + 2\sqrt{2}$ thì $Q = \frac{3+2\sqrt{2}-1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}} = \frac{2+2\sqrt{2}}{\sqrt{(1+\sqrt{2})^2}}$	0,25đ
	$= \frac{2(1+\sqrt{2})}{1+\sqrt{2}} = 2$	0,25đ
6 (1điểm)	Gọi x (g) là lượng đường cần cho thêm (đk: $x > 0$) Nồng độ dung dịch trước khi thêm đường là $\frac{144}{1200} \cdot 100\% = 12\%$	0,25đ
	Nồng độ dung dịch sau khi thêm đường là $\frac{144+x}{1200+x} \cdot 100\%$	0,25đ
	Theo đầu bài, ta có $\frac{144+x}{1200+x} \cdot 100\% = 20\% \Leftrightarrow (144+x) \cdot 5 = 1200+x$	0,25đ
	$\Leftrightarrow 4x = 480 \Leftrightarrow x = 120$ Vậy cần thêm 120g đường vào dung dịch để nồng độ tăng thêm 8%.	0,25đ
7 (1điểm)		0,25đ
	Áp dụng định lý Pitago trong tam giác ABH vuông tại H có $AH^2 = AB^2 - BH^2 = 15^2 - 9^2 = 144$, suy ra $AH = 12\text{cm}$	0,25đ
	Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ABC đường cao AH có $AH^2 = BH \cdot CH \Rightarrow CH = 144 : 9 = 16\text{cm}$	0,25đ
	Áp dụng định lý Pitago trong tam giác AHC vuông tại H có $AC^2 = AH^2 + CH^2 = 12^2 + 16^2 = 400$, suy ra $AC = 20\text{cm}$	0,25đ

8 (1điểm)		0,25đ
	Từ giả thiết suy ra EF, GH lần lượt là các đường trung bình của các tam giác ABC và ADC nên $EF = HG = 4\text{cm}$. Tương tự: $EH = FG = 3\text{cm}$	0,25đ
	Suy ra tứ giác $EFGH$ là hình bình hành, mặt khác AC vuông góc với BD nên EF vuông góc với EH. Do đó tứ giác $EFGH$ là hình chữ nhật. Gọi O là giao điểm của EG và HF Vậy 4 điểm E, F, G, H cùng thuộc đường tròn tâm O bán kính $R = OE$.	0,25đ
	Xét tam giác EFG vuông tại F có $EG^2 = EF^2 + FG^2 = 25 \Rightarrow EG = 5\text{cm}$ $R = OE = \frac{1}{2}EG = 2,5\text{cm}$	0,25đ
9 (1điểm)		0,25đ
	Vì AB, AC là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $AB \perp OB, AC \perp OC$, suy ra $\widehat{OBD} = 90^\circ; \widehat{OCE} = 90^\circ$ Do $OM \perp DE$ nên $\widehat{OMD} = 90^\circ; \widehat{OME} = 90^\circ$	0,25đ
	Tứ giác $OMBD$ có $\widehat{OBD} = \widehat{OMD} = 90^\circ$ nên nội tiếp một đường tròn, suy ra $\widehat{ODM} = \widehat{OBM}$ (cùng chắn cung OM) hay $\widehat{ODE} = \widehat{OBC}$ (1) Tứ giác $OMEC$ có $\widehat{OCE} + \widehat{OME} = 180^\circ$ nên nội tiếp một đường tròn, suy ra $\widehat{OCM} = \widehat{OEM}$ (cùng chắn cung OM) hay $\widehat{OCB} = \widehat{OED}$ (2)	0,25đ

	Mặt khác, tam giác OBC cân tại O nên $\widehat{OCB} = \widehat{OBC}$ (3) Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{ODE} = \widehat{OED}$. Vậy tam giác ODE cân tại O.	0,25đ
10 (1điểm)		0,25đ
	a) Xét tam giác MEB và MAE có Góc $\widehat{M}$ chung $\widehat{MEB} = \widehat{MAE}$ (cùng chắn cung BE) Suy ra, $\triangle MEB$ đồng dạng với $\triangle MAE \Rightarrow \frac{ME}{MA} = \frac{MB}{ME} \Rightarrow ME^2 = MA.MB$ (1)	0,25đ
	Xét tam giác MDB và MAD có Góc $\widehat{M}$ chung $\widehat{MDB} = \widehat{MAD}$ (cùng chắn cung BD) Suy ra, $\triangle MDB$ đồng dạng với $\triangle MAD \Rightarrow \frac{MD}{MA} = \frac{MB}{MD} \Rightarrow MD^2 = MA.MB$ (2) Từ (1) và (2) suy ra $MD^2 = ME^2 = MA.MB$	0,25đ
	b) Theo ý a) có $\widehat{MAE} = \widehat{MEB}$, $\widehat{MAD} = \widehat{MDB}$ nên $\widehat{MAE} + \widehat{MAD} = \widehat{DAE} = \widehat{MEB} + \widehat{MDB} = 180^\circ - \widehat{DBE}$, hay $\widehat{DAE} = 180^\circ - \widehat{DBE}$ (3) Mà $\widehat{DBE} = \widehat{PBQ}$ (đối đỉnh) (4). Xét tứ giác APBQ có $\widehat{PBQ} + \widehat{PAQ} = \widehat{DBE} + \widehat{DAE} = \widehat{DBE} + 180^\circ - \widehat{DBE} = 180^\circ$ (Theo (3) và (4)) Suy ra tứ giác APBQ nội tiếp một đường tròn. Ta có $\widehat{BPQ} = \widehat{BAQ}$ hay $\widehat{EPQ} = \widehat{MAE}$. Mà $\widehat{MAE} = \widehat{MEB}$ (Theo a)), do đó $\widehat{EPQ} = \widehat{MEB} = \widehat{DEP}$ Mà $\widehat{EPQ}; \widehat{DEP}$ ở vị trí so le trong nên PQ song song với DE.	0,25đ

-----Hết-----

Chú ý: Nếu học sinh làm cách khác đúng, vẫn cho điểm tối đa.