

Bài 1. (1,5 điểm) Cho hai biểu thức:

$$A = \sqrt{(\sqrt{5} + 1) \cdot \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}} \quad \text{và} \quad B = 2 \left(\frac{1}{\sqrt{x} - 1} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x} + 1}{x^2 - x} \quad (\text{với } x > 0; x \neq 1).$$

a) Rút gọn các biểu thức A và B .

b) Tìm các giá trị của x để $A - B = 0$.

Bài 2. (1,5 điểm)

1. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{3}{x+1} - 2y = -1 \\ \frac{5}{x+1} + 3y = 11 \end{cases}$$

2. Bác Hà gửi vào ngân hàng 100 triệu đồng với lãi suất 8% một năm và theo thể thức lãi đơn (tiền lãi không gộp chung với vốn).

a) Hãy thiết lập hàm số thể hiện mối liên hệ giữa tổng số tiền thu được T (triệu đồng) gồm cả gốc và lãi sau x năm?

b) Hỏi sau bao lâu thì bác Hà thu được số tiền 140 triệu đồng (gồm cả gốc và lãi)?

Bài 3. (2,5 điểm)

1. Cho phương trình $(m-1)x^2 - 2mx + m - 3 = 0$ (1) (x là ẩn số, m là tham số).

a) Giải phương trình (1) khi $m = 3$.

b) Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1 = 3x_2$.

2. Giải bài toán bằng cách lập phương trình, hệ phương trình

Trong tháng 3 tổng số tiền điện và tiền nước của nhà ông Hùng phải trả là 600 nghìn đồng. Sang tháng 4 ông Hùng thay hệ thống đèn chiếu sáng cũ bằng hệ thống đèn LED tiết kiệm điện nên số tiền điện tháng 4 của gia đình ông giảm 15% so với tháng 3. Nhưng số tiền nước trong tháng 4 lại tăng 5% so với tháng 3. Nên tổng số tiền điện và nước trong tháng 4 của gia đình ông Hùng là 534 nghìn đồng. Hỏi trong tháng 3 gia đình ông Hùng phải trả bao nhiêu tiền điện và bao nhiêu tiền nước?

Bài 4. (0,75 điểm)

Một chiếc cốc thủy tinh có dạng hình trụ chứa đầy nước, có chiều cao bằng 15 cm, bán kính đáy bằng 3 cm. Người ta thả từ từ vào cốc nước một vật thể có dạng hình nón bằng thủy tinh (vừa khít như hình vẽ) thì thấy nước trong chiếc cốc tràn ra ngoài. Tính thể tích của lượng nước còn lại trong chiếc cốc biết rằng chiều cao của vật thể hình nón bằng $\frac{1}{3}$ chiều cao của cốc, đường kính của đáy cốc nước và đường kính của đáy hình nón xem như bằng nhau, bỏ qua bề dày của lớp vỏ thủy tinh).



Bài 5. (3,0 điểm)

Cho nửa đường tròn tâm O có đường kính AB . Lấy điểm C trên đoạn thẳng AO ($C \neq A, C \neq O$). Đường thẳng đi qua C và vuông góc với AB cắt nửa đường tròn tại K . Gọi E là điểm bất kì trên cung KB ($E \neq K, E \neq B$). Đường thẳng CK cắt các đường thẳng AE, BE lần lượt tại H và D . Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng DH .

a) Chứng minh các tứ giác $BCHE$ và $ACED$ là các tứ giác nội tiếp.
 b) Chứng minh $CA.BD = CD.HA$ và đường thẳng IE là tiếp tuyến của nửa đường tròn (O) .

c) Đường thẳng BH cắt nửa đường tròn tại điểm thứ hai F . Gọi M là giao điểm của hai đường thẳng AB và EF . Chứng minh $OM.OC$ là một số không đổi khi điểm E di chuyển trên cung BK .

Bài 6. (0,75 điểm)

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn: $a + b + c = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$M = \frac{a}{b^3 + ab} + \frac{b}{c^3 + bc} + \frac{c}{a^3 + ca}$$

----- Hết -----

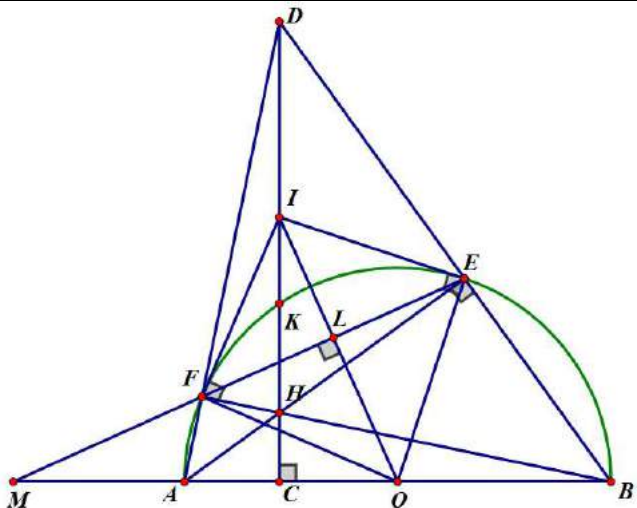
Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

Cán bộ coi thi 1: Cán bộ coi thi 2:

Bài	Đáp án	Điểm
1 (1,5 điểm)	a) (1.0 điểm)	
	Ta có: $A = \sqrt{(\sqrt{5} + 1) \cdot \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}} = \sqrt{(\sqrt{5} + 1) \cdot \sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2}} = \sqrt{(\sqrt{5} + 1) \cdot \sqrt{5} - 1 }$	0,25
	$= \sqrt{(\sqrt{5} + 1)(\sqrt{5} - 1)} = \sqrt{5 - 1} = 2 \text{ (Vì } \sqrt{5} - 1 > 0 \text{)}$	0,25
	Với $x > 0; x \neq 1$ ta có: $B = 2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x} - 1} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x} + 1}{x^2 - x} = 2 \cdot \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)} : \frac{\sqrt{x} + 1}{x(x - 1)}$ $= \frac{2}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)} : \frac{\sqrt{x} + 1}{x(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)}$	0,25
	$= \frac{2}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)} : \frac{1}{x(\sqrt{x} - 1)} = \frac{2}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)} \cdot x(\sqrt{x} - 1) = \frac{2x}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}$	0,25
	b) (0.5 điểm)	
	Với $x > 0, x \neq 1$ để $A - B = 0$ thì $2 - 2\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow 2 = 2\sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (Không thỏa mãn điều kiện } x \neq 1 \text{)}$	0,25
	Vậy không tìm được giá trị nào của x thỏa mãn $A - B = 0$.	0,25
2 (1,5 điểm)	1. (0.75 điểm)	
	Điều kiện: $x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$ $\begin{cases} \frac{3}{x+1} - 2y = -1 \\ \frac{5}{x+1} + 3y = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{9}{x+1} - 6y = -3 \\ \frac{10}{x+1} + 6y = 22 \end{cases}$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{19}{x+1} = 19 \\ \frac{10}{x+1} + 6y = 22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = 1 \\ 10 + 6y = 22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (TM } x \neq -1 \text{)} \\ y = 2 \end{cases}$	0,25
	Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = (0; 2)$.	0,25
	2. (0.75 điểm)	
	a) Hàm số thể hiện mối liên hệ giữa tổng số tiền thu được T (triệu đồng) gồm cả gốc lẫn lãi sau x năm là: $T = 100 + 8\% \cdot 100 \cdot x = 100 + 8x$	0,25
	b) Thay $T = 140$ vào công thức $T = 100 + 8x$ ta được: $100 + 8x = 140 \Leftrightarrow 8x = 40 \Leftrightarrow x = 5 \text{ (năm)}$	0,25
	Vậy sau 5 năm gửi ngân hàng bác Hà có cả gốc lẫn lãi là: 140 triệu đồng	0,25

3 (2.5 điểm)	1. (1.5 điểm)	
	a) (0.5 điểm)	
	Với $m = 3$ phương trình (1) trở thành: $2x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow 2x(x - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$	0,25
	Vậy với $m = 3$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1 = 0; x_2 = 3$.	0,25
	b) (1,0 điểm)	
	TH1: Nếu $m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$ thì PT (1) trở thành: $-2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ Do đó với $m = 1$ thì PT (1) có nghiệm duy nhất $x = -1$ (không thỏa mãn đề bài)	
	TH2: Nếu $m - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$ (*) thì PT (1) là PT bậc hai $\Delta' = m^2 - (m - 1)(m - 3) = m^2 - (m^2 - 4m + 3) = 4m - 3$ Để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thì $\Delta > 0$ $\text{hay } 4m - 3 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{3}{4} (**)$	0.25
	Khi đó theo hệ thức Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2m}{m - 1} & (2) \\ x_1 x_2 = \frac{m - 3}{m - 1} & (3) \end{cases}$	0,25
	Theo đề bài ta có: $x_1 = 3x_2$ (4) $\text{Từ (2) và (4) ta được: } x_1 = \frac{3m}{m - 1}; x_2 = \frac{m}{2(m - 1)} \quad (5)$ Thay (5) vào (3) ta được PT: $m^2 - 16m + 12 = 0$	0,25
	$m_1 = 8 - 2\sqrt{13} \text{ (thỏa mãn điều kiện (*) và (**))}$ $m_2 = 8 + 2\sqrt{13} \text{ (thỏa mãn điều kiện (*) và (**))}$ Vậy các giá trị cần tìm của m là $m \in \left\{8 - 2\sqrt{13}; 8 + 2\sqrt{13}\right\}$.	0,25
2. (1.0 điểm)		
Gọi số tiền điện và tiền nước gia đình ông Hùng phải trả trong tháng 3 lần lượt là x, y (nghìn đồng) (Điều kiện: $0 < x < 600; 0 < y < 600$) (*)		0,25
Trong tháng 3 tổng số tiền điện và tiền nước của nhà ông Hùng phải trả là 600 nghìn đồng nên ta có phương trình: $x + y = 600$ (1) Sang tháng 4, tiền điện của gia đình ông giảm 15% so với tháng 3 nên tiền điện nhà ông Hùng phải trả tháng 4 là: $x - 15\%.x = 0,85x$ (nghìn đồng) Nhưng số tiền nước trong tháng 4 lại tăng 5% so với tháng 3 nên tiền nước nhà ông Hùng phải trả tháng 4 là: $y + 5\%.y = y + 0,05y = 1,05y$ (nghìn đồng) Vì tổng số tiền điện và nước trong tháng 4 của gia đình ông Hùng là 534 nghìn đồng nên ta có phương trình: $0,85x + 1,05y = 534$ (2)		0,25

	Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 600 \\ 0,85x + 1,05y = 534 \end{cases}$	
	Giải hệ PT trên ta được $\begin{cases} x = 480 \\ y = 120 \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện (*))	0,25
	Vậy tháng 3, gia đình ông Hùng phải trả 480 nghìn đồng tiền điện và 120 nghìn đồng tiền nước.	0,25
4 (0,75 điểm)	(0,75 điểm) Thể tích của cốc nước hình trụ là : $V_1 = \pi R^2 h = \pi \cdot 3^2 \cdot 15 = 135\pi (cm^3)$	0,25
	Chiều cao của hình nón là $\frac{h}{3} = \frac{15}{3} = 5 (cm)$ Vì đường kính của đáy cốc nước và đường kính của đáy hình nón xem như bằng nhau nên bán kính đáy của hình nón bằng bán kính đáy của cốc nước và bằng 3 cm. Thể tích vật thể hình nón là: $V_2 = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot 5 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 5 = 15\pi (cm^3)$	0,25
	Vậy thể tích lượng nước còn trong chiếc cốc là : $V = V_1 - V_2 = 135\pi - 15\pi = 120\pi (cm^3)$	0,25
	(3,0 điểm)	
5 (3,0 điểm)		
	Vẽ hình đúng hết phần a) 0,25 điểm.	
	a) (1,0 điểm)	
	Ta có $\widehat{AMB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) hay $\widehat{HMB} = 90^\circ$ $CH \perp AB(gt) \Rightarrow \widehat{CHD} = 90^\circ$	0,25
	Xét tứ giác BCHE có $\widehat{BCH} + \widehat{HMB} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, mà hai góc này ở vị trí đối nhau. Do đó tứ giác BCHE là tứ giác nội tiếp.	0,25
	Ta có: $\widehat{AED} = 180^\circ - \widehat{AMB} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ $\widehat{ACD} = 90^\circ (CD \perp AB)$	0,25

	Xét tứ giác $ACED$ có hai đỉnh C, E kề nhau cùng nhìn cạnh AD dưới một góc vuông. Vậy tứ giác $ACED$ nội tiếp đường tròn đường kính AD .	0,25
	b) (1,0 điểm)	
	Tứ giác $BCHE$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{CHA} = \widehat{CBD}$ (tính chất góc ngoài của tứ giác nội tiếp) Xét $\triangle CHA$ và $\triangle CBD$ có: $\widehat{ACH} = \widehat{DCB} = 90^\circ (CH \perp AB)$; $\widehat{CHA} = \widehat{CBD} (cmt)$ Do đó: $\triangle CHA \sim \triangle CBD (g.g)$	0,25
	Suy ra: $\frac{CA}{CD} = \frac{HA}{BD} \Rightarrow CA.BD = CD.HA$.	0,25
	Tam giác DEH vuông tại E có I là trung điểm của $DH \Rightarrow ID = IE = IH$ $\Rightarrow \triangle IDE$ cân tại $I \Rightarrow \widehat{IDE} = \widehat{IED}$ Gọi R là bán kính của nửa đường tròn (O) thì $OE = OB = R$ $\Rightarrow \triangle OMB$ cân tại $O \Rightarrow \widehat{OEB} = \widehat{OBE}$	0,25
	Lại có $\widehat{IDE} + \widehat{OBE} = 90^\circ$ (tam giác BCD vuông tại C) Do đó: $\widehat{IED} + \widehat{OEB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{IEO} = 90^\circ \Rightarrow IE \perp OE$ Mà điểm E thuộc nửa đường tròn (O) . Vậy IE là tiếp tuyến của nửa đường tròn (O) .	0,25
	c) (0,75 điểm)	
	Xét $\triangle DAB$ có hai đường cao AM, DC cắt nhau tại H nên H là trực tâm của $\triangle DAB \Rightarrow BH \perp AD$ Mà $\widehat{AFD} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow AF \perp BF \Rightarrow AF \perp BH$ Suy ra ba điểm A, F, D thẳng hàng.	0,25
	Tương tự câu b ta chứng minh được IF là tiếp tuyến của nửa đường tròn (O) Suy ra OI là đường trung trực của $EF \Rightarrow OI \perp EF$ tại L . $\Rightarrow \triangle OLM \sim \triangle OCI (g.g) \Rightarrow \frac{OL}{OC} = \frac{OM}{OI} \Rightarrow OL.OI = OM.OC$ (1) $\triangle OEI$ vuông tại E , có đường cao $EL \Rightarrow OE^2 = OL.OI$ (2)	0,25
	Từ (1) và (2) ta được: $OM.OC = OE^2 = R^2$ Do AB không đổi nên $R = \frac{AB}{2}$ không đổi. Vậy tích $OC.OM$ là một số không đổi khi điểm E di chuyển trên cung BK .	0,25
	(0,75 điểm)	
6 (0,75 điểm)	Chứng minh bất đẳng thức quen thuộc: Với a, b, c là các số dương ta luôn có $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$ (*) Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$	0,25

	Ta có: $\frac{a}{b^3 + ab} = \frac{a}{b(b^2 + a)} = \frac{1}{b} \cdot \frac{a}{a + b^2} = \frac{1}{b} \left(1 - \frac{b^2}{a + b^2} \right) \geq \frac{1}{b} \left(1 - \frac{b}{2\sqrt{a}} \right) = \frac{1}{b} - \frac{1}{2\sqrt{a}}.$ (bất đẳng thức Cô – Si) Tương tự: $\frac{b}{c^3 + bc} \geq \frac{1}{c} - \frac{1}{2\sqrt{b}}; \quad \frac{c}{a^3 + ca} \geq \frac{1}{a} - \frac{1}{2\sqrt{c}}$ Do đó $M \geq \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) - \left(\frac{1}{2\sqrt{a}} + \frac{1}{2\sqrt{b}} + \frac{1}{2\sqrt{c}} \right)$	0,25
	Mặt khác: $\frac{1}{2\sqrt{a}} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + 1 \right); \quad \frac{1}{2\sqrt{b}} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{b} + 1 \right); \quad \frac{1}{2c} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{c} + 1 \right) \text{ (BĐT Cô-Si)}$ $\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{a}} + \frac{1}{2\sqrt{b}} + \frac{1}{2\sqrt{c}} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + \frac{3}{4}$ $\Rightarrow M \geq \frac{3}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - 1 \right) \geq \frac{3}{4} \left(\frac{9}{a + b + c} - 1 \right) = \frac{3}{2}$ (theo BĐT (*) và $a + b + c = 3$) Vậy M đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{3}{2}$ khi $a = b = c = 1$.	0,25

Chú ý: - Trên đây chỉ trình bày tóm tắt một cách giải, nếu thí sinh làm theo cách khác mà đúng thì cho điểm tối đa ứng với điểm của câu đó trong biểu điểm.

- Thí sinh làm đúng đến đâu cho điểm đến đó theo đúng biểu điểm.
- Trong một câu, nếu thí sinh làm phần trên sai, dưới đúng thì không chấm điểm.
- Bài hình học, thí sinh vẽ hình sai thì không chấm điểm. Thí sinh không vẽ hình mà làm vẫn làm đúng thì cho nửa số điểm của các câu làm được.
- Bài có nhiều ý liên quan tới nhau, nếu thí sinh công nhận ý trên để làm ý dưới mà thí sinh làm đúng thì chấm điểm ý đó.
- Điểm của bài thi là tổng điểm các câu làm đúng và không được làm tròn.