

Đề thi gồm 01 trang

Thời gian làm bài: 120 phút

(không kể thời gian giao đề)

Ngày thi: 07 tháng 04 năm 2023

Câu 1(2,0đ). Cho biểu thức $P = \frac{3(x + 2\sqrt{x})}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)} - \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 1} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 2}$ (với $x \geq 0; x \neq 1$).

1. Rút gọn biểu thức P .
2. Tính giá trị của P khi $x = 6 - 2\sqrt{5}$.

Câu 2(2,0đ).

1. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases}$$

2. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $(d_1): y = (m^2 + 1)x - 2m$ và $(d_2): y = (m + 3)x - m - 2$ (m là tham số). Tìm m để (d_1) song song với (d_2) .

Câu 3(2,0đ).

1. Giải phương trình: $x^2 - 5x + 6 = 0$.
2. Cho phương trình: $x^2 - 2(m + 1)x + m^2 - 2m + 3 = 0$ (với m là tham số).

Tìm m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $\frac{1}{x_1^2} - \frac{4x_2}{x_1} + 3x_2^2 = 0$.

Câu 4(3,0đ). Cho ba điểm A, B, C phân biệt, cố định và thẳng hàng sao cho B nằm giữa A và C . Vẽ nửa đường tròn tâm O đường kính BC . Từ A kẻ tiếp tuyến AM đến nửa đường tròn (O) (M là tiếp điểm). Trên cung MC lấy điểm E , đường thẳng AE cắt nửa đường tròn (O) tại điểm thứ hai là F (F không trùng E). Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng EF và H là hình chiếu vuông góc của M lên đường thẳng BC . Chứng minh:

1. Tứ giác $AMIO$ nội tiếp.
2. Hai tam giác OFH và OAF đồng dạng với nhau.
3. Trọng tâm G của tam giác OEF luôn nằm trên một đường tròn cố định khi điểm E thay đổi trên cung MC .

Câu 5(1,0đ). Cho a, b là các số dương thỏa mãn: $a + b = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $T = \frac{19}{ab} + \frac{6}{a^2 + b^2} + 2023(a^4 + b^4)$.

Hết

Họ và tên thí sinh:.....Số báo danh:.....

HƯỚNG DẪN CHẤM

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
1 (2,0đ)	1	Với $x \geq 0; x \neq 1$ ta có:	
		$P = \frac{3x + 6\sqrt{x}}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)} - \frac{(\sqrt{x} + 2)^2}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)} - \frac{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)}$	0,25
		$= \frac{3x + 6\sqrt{x} - x - 4\sqrt{x} - 4 - x + 1}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)} = \frac{x + 2\sqrt{x} - 3}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)}$	0,5
		$= \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)} = \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 2}. \text{ Vậy } P = \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 2} \text{ với } x \geq 0; x \neq 1$	0,25
	2	Với $x = 6 - 2\sqrt{5} = (\sqrt{5} - 1)^2 \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{5} - 1 (t / m)$	0,25
		Khi đó $P = \frac{\sqrt{5} - 1 + 3}{\sqrt{5} - 1 + 2} = \frac{\sqrt{5} + 2}{\sqrt{5} + 1} = \frac{(\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 1)}{(\sqrt{5} + 1)(\sqrt{5} - 1)} = \frac{3 + \sqrt{5}}{4}$	0,5
		Vậy $P = \frac{3 + \sqrt{5}}{4}$ khi $x = 6 - 2\sqrt{5}$	0,25
2 (2,0đ)	1	Ta có: $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2y = 6 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 3.2 + 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$	0,75
		Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $(x; y) = (2; -1)$.	0,25
	2	Điều kiện (d ₁) //(d ₂) là $\begin{cases} m^2 + 1 = m + 3 \\ -2m \neq -m - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 2 = 0 \\ m \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -1 \Leftrightarrow m = -1 \\ m \neq 2 \end{cases}$	0,75
		Vậy $m = -1$ thì (d ₁) //(d ₂)	0,25
3 (2,0đ)	1	Giải ra được phương trình có hai nghiệm phân biệt là $x_1 = 2; x_2 = 3$.	1,0
	2	Ta có: $\Delta' = (m+1)^2 - 1 \cdot (m^2 - 2m + 3) = m^2 + 2m + 1 - m^2 + 2m - 3 = 4m - 2$ Phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 2m + 3 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\Delta > 0 \Leftrightarrow 4m - 2 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{2} \quad (*)$	0,25
		Viết lại biểu thức với điều kiện $x_1 \neq 0$	
		$\frac{1}{x_1^2} - \frac{4x_2}{x_1} + 3x_2^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - 4x_1x_2}{x_1^2} + 3x_2^2 = 0 \Leftrightarrow 3x_1^2x_2^2 - 4x_1x_2 + 1 = 0$	0,25

		$\Leftrightarrow 3(x_1x_2)^2 - 4x_1x_2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (x_1x_2 - 1)(3x_1x_2 - 1) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x_1x_2 - 1 = 0 \\ 3x_1x_2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1x_2 = 1 \\ x_1x_2 = \frac{1}{3} \end{cases}$	
		Với $x_1x_2 = 1$ ta có $m^2 - 2m + 3 = 1 \Leftrightarrow m^2 - 2m + 2 = 0$ (vô nghiệm) Với $x_1x_2 = \frac{1}{3}$ ta có $m^2 - 2m + 3 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3m^2 - 6m + 8 = 0$ (vô nghiệm)	0,25
		Vậy không có giá trị m thỏa mãn đề bài.	0,25
4 (3,0đ)	1	Vì I là trung điểm của $EF \Rightarrow IO \perp EF$ (tính chất đường kính và dây cung) $\Rightarrow \widehat{AIO} = 90^\circ$. $\widehat{AMO} = 90^\circ$ (AM là tiếp tuyến của (O)) nên $\widehat{AMO} = \widehat{AIO} (= 90^\circ)$ Mà hai đỉnh I và M kề nhau cùng nhìn BC dưới một góc 90° Vậy tứ giác $AMIO$ nội tiếp.	1,0
		$\triangle AMO$ vuông tại M có đường cao MH nên: $OA.OH = OM^2$ (hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông) (1) Mặt khác $OM = OF$ (bằng bán kính của (O)) (2)	0,25
	2	Từ (1) và (2) ta có: $OF^2 = OA.OH \Rightarrow \frac{OF}{OA} = \frac{OH}{OF}$ Xét $\triangle OFH$ và $\triangle OAF$, ta có: $\widehat{AOF}$ góc chung và $\frac{OF}{OA} = \frac{OH}{OF}$.	0,5
		Suy ra $\triangle OFH \sim \triangle OAF$ (c.g.c)	0,25
	3	Gọi T là trung điểm GO. (3) Gọi S là điểm thuộc OA sao cho $OS = \frac{1}{3}OA \Rightarrow S$ cố định. Vì G là trọng tâm $\triangle OFE \Rightarrow OG = \frac{2}{3}OI$.	0,25

		Mà $OT = \frac{1}{2}OG$ (do (3)) $\Rightarrow OT = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}OI = \frac{1}{3}OI \Rightarrow \frac{OT}{OI} = \frac{1}{3}$.	0,25
		ΔOIA có $\frac{OT}{OI} = \frac{OS}{OA} = \frac{1}{3} \Rightarrow ST // AI$ (định lí Ta-lét đảo) $\Rightarrow ST \perp OI$.	
		ΔSGO có $ST \perp GO$ và T là trung điểm $GO \Rightarrow ST$ vừa là đường cao vừa là trung tuyến $\Rightarrow \Delta SGO$ cân tại $S \Rightarrow SG = SO$.	0,25
		Mà S, SO cố định $\Rightarrow G$ thuộc đường tròn $(S; SO)$ hay $\left(S; \frac{OA}{3}\right)$.	0,25
5 (1,0đ)	Cho a, b là các số dương thoả mãn: $a + b = 1$		
	Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $T = \frac{19}{ab} + \frac{6}{a^2 + b^2} + 2023(a^4 + b^4)$		1,0
	Ta có $(a - b)^2 \geq 0 \Rightarrow (a + b)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow \frac{a + b}{ab} \geq \frac{4}{a + b}$ ($a, b > 0$) $\Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a + b}$ (*). Áp dụng (*) ta có: $\frac{1}{2ab} + \frac{1}{a^2 + b^2} \geq \frac{4}{(a + b)^2} = 4$ (1)		0,25
	Mặt khác từ $1 = (a + b)^2 \geq 4ab \Rightarrow \frac{1}{ab} \geq 4$ (2) Lại có $a^4 + b^4 \geq \frac{(a^2 + b^2)^2}{2} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{(a + b)^2}{2} \right)^2 = \frac{1}{8}$ (3)		0,25
	Từ (1), (2), (3) ta có: $T = \frac{16}{ab} + 6 \left(\frac{1}{2ab} + \frac{1}{a^2 + b^2} \right) + 2023(a^4 + b^4)$ $\geq 16.6 + 6.4 + \frac{2023}{8} = 88 \frac{2023}{8}$. Dấu “=” xảy ra khi $a = b = \frac{1}{2}$ Vậy $\min T = 88 \frac{2023}{8}$ đạt tại $a = b = \frac{1}{2}$		0,5

Lưu ý: - Học sinh làm cách khác đúng vẫn cho điểm tối đa. Bài hình nếu vẽ hình sai thì không chấm bài đó.

- Câu 4 HS vẽ hình sai cơ bản thì không chấm điểm bài hình.