

Bài 1 (2 điểm). Cho hai biểu thức:

$$A = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3} \text{ và } B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} + \frac{6\sqrt{x}-8}{x-5\sqrt{x}+6} \text{ với } x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$$

a. Tính giá trị của A khi $x = 16$

b. Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3}$

c. Cho $P = A : B$. Tìm x để $P < \frac{1}{2}$

Bài 2 (2,5 điểm)

1. Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:

Một cơ sở sản xuất lập kế hoạch làm 600 sản phẩm trong một thời gian nhất định. Do cải tiến kĩ thuật, năng suất mỗi ngày tăng 10 sản phẩm. Vì thế không những hoàn thành sớm kế hoạch 1 ngày, mà còn vượt mức 100 sản phẩm. Hỏi theo kế hoạch mỗi ngày phải làm bao nhiêu sản phẩm.

2. Một chiếc thùng hình trụ có đường kính đáy là 40cm được đựng đầy nước. Sau khi mức ra 30 lít nước thì còn lại $\frac{2}{3}$ thùng. Tính chiều cao của thùng (lấy $\pi = 3,14$ và làm tròn đến đơn vị cm).

Bài 3: (2 điểm)

1. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x+2} + \frac{1}{y-1} = 3 \\ 2\sqrt{x+2} - \frac{3}{y-1} = 1 \end{cases}$$

2. Trong mặt phẳng tọa độ, cho Parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng

(d): $y = 2(m-1)x - m^2 + 3$ (với m là tham số)

a. Tìm m để (d) tiếp xúc với (P). Khi đó tìm tọa độ tiếp điểm.

b. Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ thỏa mãn:

$$x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = 8$$

Bài 4 (3 điểm)

Cho (O, R) đường kính AC, kẻ tiếp tuyến Ax. Trên tia Ax lấy điểm M, kẻ tiếp tuyến MB với đường tròn. MC cắt đường tròn tại D. AB cắt MO tại H.

a/ Chứng minh tứ giác AMBO nội tiếp và $MB^2 = MH.MO$

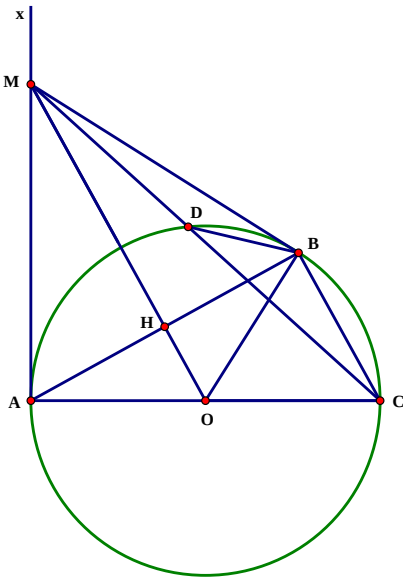
b/ Chứng minh: $MC.MD = MH.MO$. Từ đó suy ra tứ giác COHD nội tiếp.

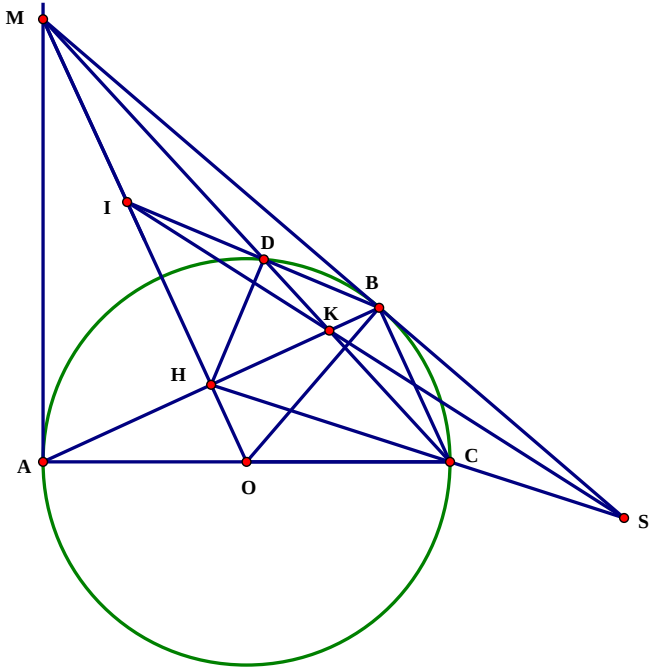
c/ Gọi I là giao điểm của BD với OM; K là giao điểm của AB với CD. Chứng minh ba đường thẳng MB, HC, IK đồng quy

Bài 5 (0,5 điểm) Giải phương trình sau: $x^2 + 2x\sqrt{x - \frac{1}{x}} = 3x + 1$

Câu	Phần	Nội dung	Điểm
1 (2đ)	a	Với $x = 16$ (TMĐK) thay vào biểu thức A ta được:	0,25
		Tính đúng $A = 3$, KL:	0,25
	b	ĐKXD: $x \geq 0; x \neq 4$ $B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} + \frac{6\sqrt{x}-8}{x-5\sqrt{x}+6}$ $= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} + \frac{6\sqrt{x}-8}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}$ $= \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-3) - (\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2) + 6\sqrt{x}-8}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}$	0,25
		$= \frac{2x - 6\sqrt{x} - x + 4 + 6\sqrt{x} - 8}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} = \frac{x-4}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}$	0,25
		$= \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3}$	0,25
		KL: $B = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3}$	0,25
	c	ĐKXD: $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$ $P = A:B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3} : \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3} \cdot \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+2} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}$ $P < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} - \frac{1}{2} < 0$ $\Leftrightarrow \frac{2(\sqrt{x}-1) - (\sqrt{x}+2)}{2(\sqrt{x}+2)} < 0 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}-2-\sqrt{x}-2}{2(\sqrt{x}+2)} < 0$ $\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-4}{2(\sqrt{x}+2)} < 0$	0,25
		Vì $x \geq 0 \Rightarrow 2(\sqrt{x}+2) > 0$	

		Nên để $\frac{\sqrt{x}-4}{2(\sqrt{x}+2)} < 0$ thì $\sqrt{x}-4 < 0 \Rightarrow \sqrt{x} < 4 \Rightarrow x < 16$ Vậy $0 \leq x < 16$ và $x \neq 4; x \neq 9$ thì $P < \frac{1}{2}$	0,25
2 (2,5đ)	1	Gọi năng suất dự kiến là x (sp/ngày, x>0) Thì năng suất thực tế là: x + 10 (sp/ngày)	0,5
		Theo dự định, mỗi ngày làm được $\frac{600}{x}$ (sp)	0,25
		Thực tế mỗi ngày làm được $\frac{700}{x+10}$ (sp)	
		Theo bài ra ta có phương trình: $\frac{600}{x} - \frac{700}{x+10} = 1$	0,25
		$\Leftrightarrow 600(x+10) - 700x = x(x+10)$ $\Leftrightarrow 600x + 6000 - 700x = x^2 + 10x$ $\Leftrightarrow x^2 + 110x - 6000 = 0$	0,25
		Giải PT được: $x_1 = 40$ (tmdk); $x_2 = -150$ (loại)	0,5
		Vậy theo dự định mỗi ngày phải làm 40 (sp)	0,25
	2	Đôi 40cm = 4dm Bán kính đáy là: $4:2 = 2$dm Thể tích thùng là: $30.3 = 90$ lít Từ công thức: $V = \pi.R^2.h \Rightarrow h = \frac{V}{\pi R^2} = \frac{90}{3,14.4} \approx 7,1$ (dm) = 71cm Vậy chiều cao thùng là 71(cm)	0,25
3 (2đ)	3.1 0,75đ	$\begin{cases} \sqrt{x+2} + \frac{1}{y-1} = 3 \\ 2\sqrt{x+2} - \frac{3}{y-1} = 1 \end{cases} \quad \text{Đkxd: } x \geq -2; y \neq 1$ Đặt $\begin{cases} \sqrt{x+2} = a \\ \frac{1}{y-1} = b \end{cases} \quad (a \geq 0)$ Hệ pt $\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ 2a - 3b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 2b = 6 \\ 2a - 3b = 1 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 5b = 5 \\ a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \quad (\text{tm})$	0,25
		Thay ản: $\begin{cases} \sqrt{x+2} = 2 \\ \frac{1}{y-1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 = 4 \\ y-1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \quad (\text{tm})$	0,25

3.2 (a) 0,5 đ		Vậy hệ pt đã cho có nghiệm duy nhất: $(x, y) = (2; 2)$	0,25
		Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P): $x^2 = 2(m-1)x - m^2 + 3$ $\Leftrightarrow x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 3 = 0 \quad (*)$	0,25
		$\Delta' = m^2 - 2m + 1 - m^2 + 3 = 0 = -2m + 4$ Đề (d) tiếp xúc với (P) thì phương trình (*) có nghiệm kép $\Leftrightarrow -2m + 4 = 0 \Leftrightarrow -2m = -4 \Leftrightarrow m = 2$ Khi đó: $x_1 = x_2 = m - 1 = 2 - 1 = 1 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow A(1; 1)$ Vậy với $m = 2$ thì (d) tiếp xúc (P). Khi đó tọa độ tiếp điểm là: $A(1; 1)$	0,25
		Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P): $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 3 = 0 \quad (*)$ $\Delta' = -2m + 4$ Đề (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt thì pt (*) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow -2m + 4 > 0 \Leftrightarrow -2m > -4 \Leftrightarrow m < 2$ Theo Vi-et: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) \\ x_1 x_2 = m^2 - 3 \end{cases}$ Theo bài: $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2 = 8$ $\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 - 2x_1 x_2 = 8$ $\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = 8$ $\Leftrightarrow [2(m-1)]^2 - 4(m^2 - 3) = 8$ $\Leftrightarrow 4m^2 - 8m + 4 - 4m^2 + 12 = 8$ $\Leftrightarrow -8m = -8$ $\Rightarrow m = 1$ (tmđk) KL:	0,25
4 (3đ)	a		
		Vẽ hình đúng đến câu a	0,25
		Vì MA, MB là các tiếp tuyến của (O) nên $\widehat{MAO} = 90^\circ$; $\widehat{MBO} = 90^\circ$ Xét tứ giác BHIM có: $\widehat{MAO} + \widehat{MBO} = 180^\circ$ Mà hai góc ở vị trí đối diện	0,25

		Vậy tứ giác MAOB nội tiếp Theo tc tiếp tuyến cắt nhau ta có: $MA = MB$ Lại có: $OA = OB = R$ $\Rightarrow OM$ là đường trung trực của $AB \Rightarrow OM \perp AB$ Áp dụng HTL trong tam giác MOB ta có: $MB^2 = MH.MO$	0,25 0,25 0,25
	b	- Xét trong (O) ta có: $\widehat{MCB} = \widehat{MBD}$ (góc nt và góc tạo bởi tt và dây chắn cùng cung BD) Xét $\triangle MBD$ và $\triangle MCB$ có: $\widehat{M}$ là góc chung $\widehat{MCB} = \widehat{MBD}$ (cm trên) $\Rightarrow \triangle MBD \sim \triangle MCB$ (g-g) $\Rightarrow \frac{MB}{MD} = \frac{MC}{MB} \Rightarrow MB^2 = MC.MD$ Mà $MB^2 = MH.MO \Rightarrow MC.MD = MH.MO$ $\Rightarrow \frac{MD}{MH} = \frac{MO}{MC}$ - Xét $\triangle MDH$ và $\triangle MOC$ có: $\widehat{M}$ là góc chung $\frac{MD}{MH} = \frac{MO}{MC}$ $\Rightarrow \triangle MDH \sim \triangle MOC$ (c-g-c) $\Rightarrow \widehat{MHD} = \widehat{MCO}$ Mà $\widehat{MHD} + \widehat{DHO} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{DHO} + \widehat{DCO} = 180^\circ$ $\Rightarrow$ Tứ giác DHOC nội tiếp (tổng hai góc đối bằng 180°)	0,25 0,25 0,25
	c	 Xét trong (O) ta có: $\widehat{ABD} = \widehat{ACD}$ (góc nt chắn cùng cung AD) Mà $\widehat{ACD} = \widehat{DHI} \Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{DHI}$ Lại có: $\widehat{DHI} + \widehat{DHB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{HBD} + \widehat{DHB} = 90^\circ \Rightarrow HD \perp BI$ Áp dụng htl trong tam giác BHI ta có: $IH^2 = ID.IB$ (1)	0,25

	Mặt khác: $\Rightarrow \widehat{IMD} = \widehat{DCB}$ (slt) Mà $\widehat{DCB} = \widehat{MBD} \Rightarrow \widehat{IMD} = \widehat{IBM}$ Xét $\triangle IMD$ và $\triangle IBM$ có: $\hat{I}$ là góc chung $\widehat{IMD} = \widehat{IBM}$ (cm trên) $\Rightarrow \triangle IMD \simeq \triangle IBM$ (g-g) $\Rightarrow \frac{IM}{ID} = \frac{IB}{IM} \Rightarrow IM^2 = DB \cdot IB$ (2) Từ (1) và (2) $\Rightarrow IH = IM$ Gọi S là giao điểm của MB và HC Tứ giác MBCH là hình thang do $BC \parallel MH$ (cùng vuông góc với AC) Xét hình thang MBCH có: S là giao điểm hai cạnh bên; K là giao điểm hai đường chéo; I là trung điểm cạnh đáy $\Rightarrow S, K, I$ thẳng hàng (bổ đề hình thang) $\Rightarrow$ Vậy ba đường thẳng: MB, HC, IK đồng quy tại S.	0.25 0,25
5 (0,5)	$x^2 + 2x\sqrt{x - \frac{1}{x}} = 3x + 1$ Điều kiện: $-1 \leq x < 0, x \geq 1$ Vì $x \neq 0$ nên chia cả hai vế cho x ta được: $x + 2\sqrt{x - \frac{1}{x}} = 3 + \frac{1}{x} \Leftrightarrow x - \frac{1}{x} + 2\sqrt{x - \frac{1}{x}} - 3 = 0$ Đặt $\sqrt{x - \frac{1}{x}} = t \geq 0$, pt $\Leftrightarrow t^2 + 2t - 3 = 0$ Giải pt được $t = 1$ (tm); $t = -3$ (loại) $t = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x - \frac{1}{x}} = 1 \Leftrightarrow x - \frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$ $\Leftrightarrow x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ (tm) $x_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ (tm) KL:	0,25 0,25

Ghi chú: Học sinh làm cách khác đúng chấm điểm tương đương.