

Bài I (2,0 điểm). Cho các biểu thức : $A = \frac{x + \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 2}$ và $B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} - \frac{x - \sqrt{x} + 2}{x - \sqrt{x}}$ với $x > 0; x \neq 1$.

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 9$.

2) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x}}$.

3) Cho $P = AB$. So sánh P với 3.

Bài II (2,0 điểm)

1) Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:

Năm ngoái, hai đơn vị sản xuất nông nghiệp thu hoạch được 820 tấn thóc. Năm nay, đơn vị thứ nhất làm vượt mức 15%, đơn vị thứ hai làm vượt mức 20% so với năm ngoái. Do đó cả hai đơn vị thu hoạch được 965 tấn thóc. Hỏi năm nay mỗi đơn vị thu hoạch được bao nhiêu tấn thóc?

2) Một dụng cụ làm bằng thủy tinh có dạng hình nón có chiều cao là 12 cm, đường kính đáy là 18 cm.

Tính thể tích dung dịch khi được đựng đầy trong dụng cụ đó (lấy $\pi \approx 3,14$).

Bài III (2,0 điểm).

1) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2(x - 3) - 5(y + 1) = 0 \\ 4(x + 1) - 2(y - 3) = 0 \end{cases}$$

2) Cho phương trình $x^2 - 2(m - 2)x + 2m - 5 = 0$ (m là tham số)

a) Chứng minh rằng phương trình luôn có nghiệm với mọi giá trị của m .

b) Gọi $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình. Cho $Q = x_1(1 - x_2) + x_2(1 - x_1) < 4$, tìm m để $Q < 4$.

Bài IV (3,5 điểm). Cho nửa đường tròn tâm O , đường kính $AB = 2R$. Lấy điểm C thuộc nửa đường tròn ($CA > CB$). Qua O kẻ đường thẳng d vuông góc với AB , đường thẳng d cắt AC , nửa đường tròn và BC lần lượt tại $D; E; F$.

a) Chứng minh $AOCF$ là tứ giác nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh $OB \cdot AD = OD \cdot BF$.

c) Tiếp tuyến của nửa đường tròn qua C cắt d tại I . Chứng minh I là trung điểm FD .

Tìm vị trí của điểm C trên nửa đường tròn để diện tích của tam giác ABC gấp 6 lần diện tích của tam giác DIC .

Bài V (0,5 điểm). Cho $a \geq 0; b \geq 0; c \geq 0$ và $a + b + c = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :

$$M = \sqrt{5a^2 + 3a + 1} + \sqrt{5b^2 + 3b + 1} + \sqrt{5c^2 + 3c + 1}.$$

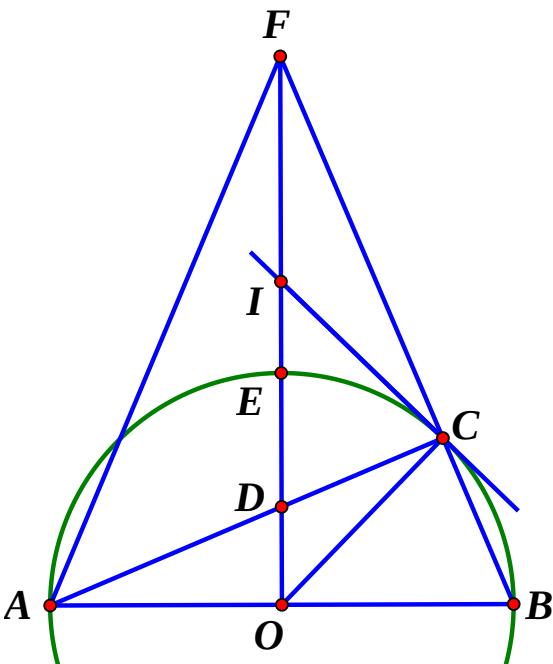
---HẾT---

ĐÁP ÁN

NĂM HỌC 2021- 2022

BÀI	CÂU	ĐÁP ÁN	ĐIỂM
I	1 0,5 đ	Thay $x=9$ (TMĐK) vào A ta có: $A = \frac{9+\sqrt{9}+1}{\sqrt{9}+2}$	0,25
		Tính được $A = \frac{13}{5}$	0,25
	2 1,0đ	$B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{x-\sqrt{x}+2}{x-\sqrt{x}}$ $= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{x-\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}$	0,25
		$= \frac{2\sqrt{x}.\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} - \frac{x-\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}$	0, 25
		$= \frac{2x-x+\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} = \frac{x+\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}$	0, 25
		$= \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}$ $= \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}$	0,25
	3 0,5 đ	Ta có: $P = AB \Rightarrow P = \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} = \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$ Xét hiệu $P-3 = \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} - 3$ $P-3 = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}}$	0,25
		Với điều kiện $x > 0; x \neq 1$ suy ra được $(\sqrt{x}-1)^2 > 0; \sqrt{x} > 0 \Rightarrow \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}} > 0 \Rightarrow P > 3.$	0,25
II	1 (0,5 đ)	Bán kính đáy của nón là $18:2 = 9cm$	0,25
		Thể tích của dung dịch NaOH là: $V = \frac{1}{3}.\pi.R^2.h \approx \frac{1}{3}.3,14.9^2.12 \approx 1017,36(cm^3).$	0, 25
	2 (1,5đ)	Gọi số tấn thóc năm ngoài của đơn vị I và đơn vị II lần lượt là x, y (tấn thóc) (điều kiện $x, y \in \mathbb{N}^*, x, y < 820$)	0, 25

		Năm ngoái, hai đơn vị sản xuất nông nghiệp thu hoạch được 820 tấn thóc nên ta có phương trình: $x + y = 820$ (1)	0, 25
		Năm nay đơn vị thứ nhất thu hoạch vượt mức 15% nên đơn vị thứ nhất làm được $1,15x$ (tấn thóc), đơn vị thứ hai làm vượt mức 20% nên đơn vị thứ hai làm được $1,2x$ (tấn thóc). Năm nay, cả hai đơn vị thu hoạch được 965 tấn thóc nên ta có phương trình $1,15x + 1,2y = 965$	0, 25
		Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = 820 \\ 1,15x + 1,2y = 965 \end{cases}$	0, 25
		Giải hệ được $\begin{cases} x = 380 \\ y = 440 \end{cases}$ (thỏa mãn).	0, 25
		Vậy sản lượng năm nay đơn vị thứ nhất thu hoạch được là $380 + 380.15\% = 437$ tấn Sản lượng năm nay đơn vị thứ hai thu hoạch được là $965 - 437 = 528$ tấn	0, 25
III	1 (1,0 đ)	Ta có $\begin{cases} 2(x-3) - 5(y+1) = 0 \\ 4(x+1) - 2(y-3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 5y = 11 \\ 4x - 2y = -10 \end{cases}$	0,5
		$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{9}{2} \\ y = -4 \end{cases}$ Vậy hệ phương trình có nghiệm $\left(-\frac{9}{2}; -4\right)$.	0,5
	2 a (1,0 đ)	$x^2 - 2(m-2)x + 2m - 5 = 0$ Có $\Delta' = (m-3)^2 \geq 0$ với mọi m	0, 25
		Ta có $(m-3)^2 \geq 0$ với mọi $m \Rightarrow \Delta' \geq 0$ với mọi m nên phương trình có hai nghiệm phân biệt với mọi m	0, 25
	2 b (1,0 đ)	Gọi $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình. Theo định lý Vi-et ta có : $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m - 4 \\ x_1 x_2 = 2m - 5 \end{cases}$. Ta có $Q = x_1(1-x_2) + x_2(1-x_1) < 4 \Leftrightarrow x_1 x_2 - 2x_1 x_2 < 4$	0, 25
		Thay vào Q ta được: $2m - 2 - 2(2m - 5) < 4$ Tìm được $m > 1$	0, 25

IV			0,25
	1	Chứng minh $\angle AOF = \angle ACF = 90^\circ$	0,25
		O và C cùng nhìn đoạn AF dưới một góc 90°	0,25
		$\Rightarrow AOCF$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính AF	
	2	Chứng minh $\triangle AOD \sim \triangle FOB$ (g - g)	0,5
		$\Rightarrow \frac{OD}{OB} = \frac{AD}{BF} \Rightarrow OB \cdot AD = OD \cdot BF$.(đpcm)	0,5
	3	Ta có $\angle CBA = \angle ICA$ (cùng bằng $\frac{1}{2} \text{ số đo } \widehat{AC}$) Mặt khác $\angle IFC + \angle CBA = 90^\circ$; $\angle FCI + \angle ICA = 90^\circ \Rightarrow \angle IFC = \angle FCI$ $\Rightarrow \triangle IFC$ cân tại C $\Rightarrow IF = IC$ Xét $\triangle CDF$ vuông tại C có $\angle IFC + \angle IDC = 90^\circ$; $\angle FCI + \angle ICD = 90^\circ \Rightarrow \angle IDC = \angle ICD \Rightarrow \triangle ICD$ cân tại I Do đó $IF = ID = IC$ nên I là trung điểm FD .	0,25
		Đặt $\sin \angle ABC = \alpha$ Ta có $S_{\triangle DIC} = \frac{1}{2} S_{\triangle CDF} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot CD \cdot CF$. $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} CA \cdot CB$ Tính các cạnh theo R và $\sin \angle ABC = \alpha$. Tìm được $\sin \angle ABC = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \angle ABC = 60^\circ$. Cách khác: $S_{\triangle ABC} = 6 S_{\triangle DIC} \Rightarrow S_{\triangle ABC} = 3 S_{\triangle FDC}$. Mà $\triangle ABC \sim \triangle FDC$ (g - g) $\Rightarrow \left(\frac{BC}{DC} \right)^2 = 3$ $\Rightarrow \frac{BC}{DC} = \sqrt{3} \Rightarrow \tan \angle CDB = \sqrt{3} \Rightarrow \angle CDB = 60^\circ \Rightarrow \angle BDA = 120^\circ$. $\triangle DAB$ cân tại D $\Rightarrow \angle DAB = \angle DBA = 30^\circ \Rightarrow \angle ABC = 60^\circ$.	0,25

V		Ta có: $a \geq 0; b \geq 0; c \geq 0; a + b + c = 1$ $\Rightarrow 0 \leq a, b, c \leq 1 \Rightarrow a^2 \leq a, b^2 \leq b, c^2 \leq c.$ Do đó : $M = \sqrt{4a^2 + (a^2 + 3a + 1)} + \sqrt{4b^2 + (b^2 + 3b + 1)} + \sqrt{4c^2 + (c^2 + 3c + 1)}$ $\leq \sqrt{4a^2 + (a + 3a + 1)} + \sqrt{4b^2 + (b + 3b + 1)} + \sqrt{4c^2 + (c + 3c + 1)} \quad .$	0,25
		$= \sqrt{(2a + 1)^2} + \sqrt{(2b + 1)^2} + \sqrt{(2c + 1)^2} = 2a + 2b + 2c + 3 = 5$ Vậy $Max M = 5$ khi $(a; b; c)$ là hoán vị $(0; 0; 1)$.	0,25