

Bài 1 (2 điểm). Cho hai biểu thức:

$$A = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3} \quad \text{và} \quad B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} + \frac{4\sqrt{x}-8}{x-4} \quad \text{với } x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$$

a/ Tính giá trị của A khi $x = 16$.

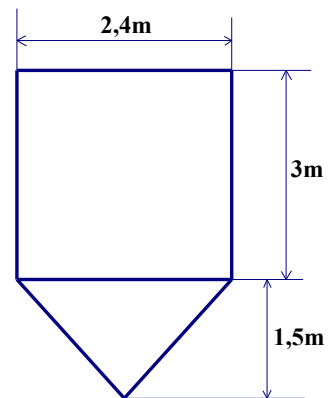
b/ Rút gọn biểu thức B.

c/ Cho $P = A.B$. Tìm số nguyên x lớn nhất để P có giá trị là số nguyên.**Bài 2** (2,5 điểm)

1/ Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:

Hai đội sản xuất lập kế hoạch làm chung 7000 sản phẩm trong một thời gian nhất định. Do đã hết ảnh hưởng của dịch COVID nên năng suất đội I tăng 15%, đội II tăng 20%. Vì thế, trong thời gian quy định, cả hai đội đã làm được 8200 sản phẩm. Hỏi theo kế hoạch mỗi đội phải làm bao nhiêu sản phẩm?

2/ Người ta làm một chiếc bồn chứa nguyên liệu có phần trên dạng một hình trụ rỗng, phần dưới dạng hình nón với mặt cắt và các kích thước như hình vẽ. Hỏi bồn chứa được bao nhiêu mét khối (coi bề dày của thành không đáng kể. Lấy $\pi \approx 3,14$ và làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

**Bài 3:** (2 điểm)

$$1/ \text{Giải hệ phương trình: } \begin{cases} 2x + \frac{1}{y-1} = 5 \\ 3x - \frac{2}{y-1} = 4 \end{cases}$$

2/ Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho Parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = 2mx - 2m + 2$ (với m là tham số)

a/ Chứng minh rằng đường thẳng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt với mọi giá trị của m .b/ Gọi x_1 và x_2 là hoành độ giao điểm của (d) và (P).Tìm m để: $x_1^2 + 2mx_2 = 8$ **Bài 4:** (3 điểm)

Từ điểm M nằm ngoài (O,R), kẻ hai tiếp tuyến MA, MB tới đường tròn (A và B là các tiếp điểm). Gọi N là trung điểm của MA; BN cắt (O) tại C.

a/ Chứng minh: Tứ giác MAOB nội tiếp và $NA^2 = NB.NC$.b/ Tia MC cắt (O) tại điểm thứ hai D. Chứng minh $BD \parallel AM$.

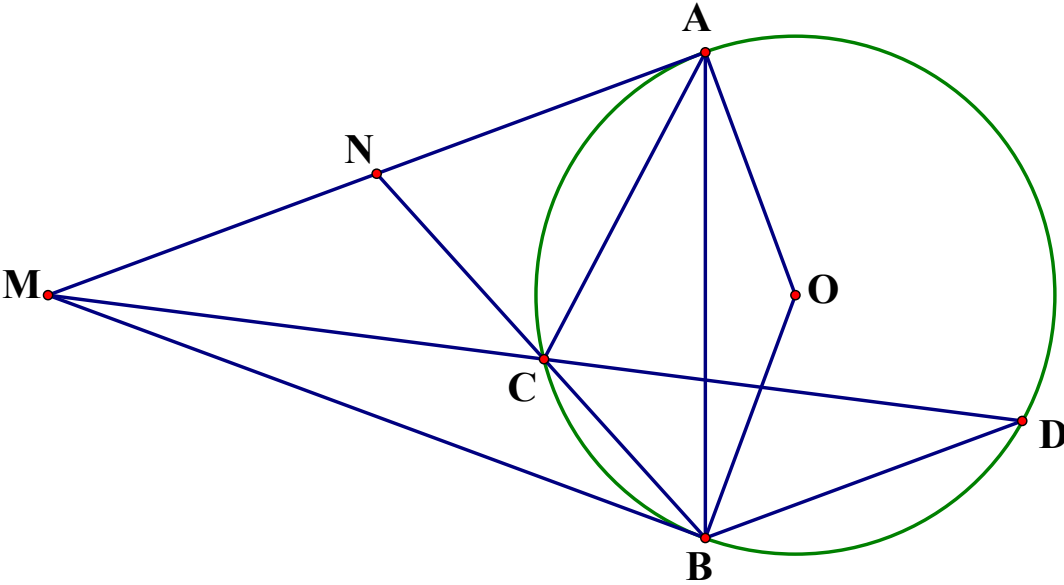
c/ Gọi I là trung điểm của CD; K là giao điểm của AB và CD.

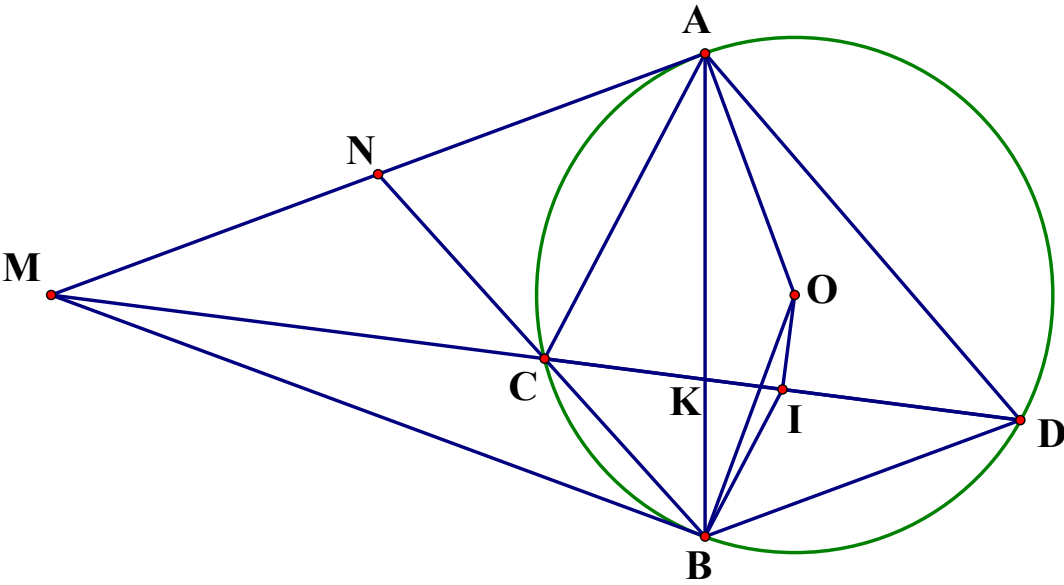
Chứng minh: $MC.MD = MI.MK$ **Bài 5:** (0,5 điểm) Cho $a, b > 0$, $a + b = 1$. Tìm GTNN của: $A = \frac{3}{a^2 + b^2} + \frac{2}{ab}$

HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN

Câu	Phần	Nội dung	Điểm
1 (2đ)	a	Với $x = 16$ (TMĐK) thay vào biểu thức A ta được:	0,25
		Tính đúng $A = 2$, KL:	0,25
	b	ĐKXĐ: $x \geq 0; x \neq 4$ $B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} + \frac{4\sqrt{x}-8}{x-4}$ $= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} + \frac{4\sqrt{x}-8}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}$ $= \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-2) - (\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}+1) + 4\sqrt{x}-8}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}$	0,25
		$= \frac{2x - 4\sqrt{x} - x - 3\sqrt{x} - 2 + 4\sqrt{x} - 8}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} = \frac{x - 3\sqrt{x} - 10}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}$	0,25
		$= \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-5)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} = \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-2}$	0,25
		$B = \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-2}, \text{ KL}$	0,25
	c	ĐKXĐ: $x \geq 0; x \neq 4$ $P = A.B = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3} \cdot \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-2} = \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-3} = \frac{\sqrt{x}-3-2}{\sqrt{x}-3} = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}-3}$ Đề $P \in \mathbb{Z}$ thì $\sqrt{x}-3 \in U_{(2)} = \{-2; -1; 1; 2\}$ * $\sqrt{x}-3 = -2 \Rightarrow \sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1$ (TM) * $\sqrt{x}-3 = -1 \Rightarrow \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4$ (Loại) * $\sqrt{x}-3 = 1 \Rightarrow \sqrt{x} = 4 \Rightarrow x = 16$ (TM) * $\sqrt{x}-3 = 2 \Rightarrow \sqrt{x} = 5 \Rightarrow x = 25$ (TM) Vì x là số nguyên lớn nhất nên $x = 25$	0,25
			0,25
2 (2,5 đ)	1	Gọi số sản phẩm đội I phải làm theo kế hoạch là x (sp, $x \in \mathbb{Z}^+; x < 7000$) Thì số sản phẩm đội II phải làm theo kế hoạch là; $7000 - x$ (sp)	0,25 0,25

		Thực tế, số sản phẩm đội I tăng: $\frac{15x}{100}$ (sp)	0,25
		số sản phẩm đội II tăng: $\frac{20(7000-x)}{100}$ (sp)	0,25
		Cả hai đội tăng: $8200-7000=1200$ (sp) Nên ta có phương trình:	
		$\frac{15x}{100} + \frac{20(7000-x)}{100} = 1200$	0,25
		$\Leftrightarrow 15x + 20(7000-x) = 120000$ $\Leftrightarrow 15x + 140000 - 20x = 120000$ $\Leftrightarrow -5x = -20000$ $\Leftrightarrow x = 4000$ (TMĐK)	0,5
2		Vậy theo kế hoạch, đội I phải làm: 4000 (sp) Và đội II phải làm: $7000 - 4000 = 3000$ (sp)	0,25
		Bán kính đường tròn đáy là: $2,4:2 = 1,2$ (m) Thể tích phần hình trụ là: $V_1 = \pi.r^2h \approx 3,14.(1,2)^2.3 \approx 13,56$ (m ³)	0,25
		Thể tích phần hình nón là: $V_2 = \frac{1}{3} \pi.r^2h \approx \frac{1}{3}.3,14.(1,2)^2.1,5 \approx 2,26$ (m ³)	
		Thể tích bồn chứa là: $V = V_1 + V_2 \approx 13,56 + 2,26 = 15,82$ (m ³)	0,25
3 (2đ)	3.1 0,75đ	$\begin{cases} 2x + \frac{1}{y-1} = 5 \\ 3x - \frac{2}{y-1} = 4 \end{cases} \quad \text{Đkxd: } y \neq 1$ Đặt $\frac{1}{y-1} = a$ Hệ pt $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + a = 5 \\ 3x - 2a = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2a = 10 \\ 3x - 2a = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 14 \\ a = 5 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ a = 1 \end{cases}$	0,25
		Thay ẩn: $\frac{1}{y-1} = 1 \Rightarrow y - 1 = 1 \Rightarrow y = 2$ (tm)	0,25
		Vậy hệ pt đã cho có nghiệm duy nhất: $(x, y) = (2; 2)$	0,25
	3.2 (a) 0,5đ	Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P): $x^2 = 2mx - 2m + 2$ $\Leftrightarrow x^2 - 2mx + 2m - 2 = 0$ (*) $\Delta' = m^2 - 2m + 2$	0,25
		$= m^2 - 2m + 1 + 1$ $= (m - 1)^2 + 1 > 0 \forall m$ $\Rightarrow$ phương trình (*) luôn có hai nghiệm phân biệt $\forall m$ Vậy đường thẳng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt $\forall m$	0,25

3.2 (b) 0,75đ		Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P): $x^2 - 2mx + 2m - 2 = 0 \quad (*)$ Theo phần a, phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt $\forall m$ Theo Định lý Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 x_2 = 2m - 2 \end{cases}$	0,25
		Theo bài: $x_1^2 + 2mx_2 = 8$ $\Leftrightarrow x_1^2 + (x_1 + x_2)x_2 = 8$ $\Leftrightarrow x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 = 8$ $\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - x_1 x_2 = 8$ $\Leftrightarrow (2m)^2 - (2m - 2) = 8$ $\Leftrightarrow 4m^2 - 2m + 2 = 8$ $\Leftrightarrow 4m^2 - 2m - 6 = 0$ $\Leftrightarrow 2m^2 - m - 3 = 0$ Nx: $a - b + c = 2 + 1 - 3 = 0$ $\Rightarrow m_1 = -1; m_2 = \frac{3}{2}$	0,25
		Vậy với $m = -1$ hoặc $m = \frac{3}{2}$ thì (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ thỏa mãn: $x_1^2 + 2mx_2 = 8$	0,25
4 (3đ)	a		0,25
		Vẽ hình đúng đến câu a	
		Vì MA, MB là các tiếp tuyến của (O) nên $\widehat{MAO} = 90^\circ$; $\widehat{MBO} = 90^\circ$ Xét tứ giác MAOB có: $\Rightarrow \widehat{MAO} + \widehat{MBO} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$; Mà hai góc ở vị trí đối diện Nên tứ giác MAOB nội tiếp	0,25 0,25 0,25
		Xét trong (O) ta có: $\widehat{CAN}$ là góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây chắn cung AC $\widehat{CBA}$ là góc nội tiếp chắn cung AC	0,25

	$\Rightarrow \widehat{CAN} = \widehat{CBA}$ Xét $\angle NAC$ và $\angle NBA$ có: $\widehat{ANB}$ là góc chung $\widehat{NAC} = \widehat{NBA}$ (cm trên) $\Rightarrow \angle NAC = \angle NBA$ (g-g) $\Rightarrow \frac{NA}{NC} = \frac{NB}{NA} \Rightarrow NA^2 = NB \cdot NC$	0,5 0,25
b	Vì $NA^2 = NB \cdot NC$, mà $NA = NM \Rightarrow NM^2 = NB \cdot NC$ $\Rightarrow \frac{NM}{NC} = \frac{NB}{NM}$	0,25
	Xét $\angle NMC$ và $\angle NBM$ có: $\widehat{MNB}$ là góc chung $\frac{NM}{NC} = \frac{NB}{NM}$	0,25
	$\angle NMC = \angle NBM$ (c-g-c) $\Rightarrow \widehat{NMC} = \widehat{NBM}$	
	Xét trong (O) ta có: $\widehat{NBM} = \widehat{BDC}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây chắn cùng BC)	0,25
	$\Rightarrow \widehat{NMC} = \widehat{BDC}$ $\Rightarrow BD \parallel AM$ (hai góc SLT bằng nhau)	0,25
c	 Vì I là trung điểm CD $\Rightarrow OI \perp CD$ Ta có: $\widehat{MAO} = 90^\circ$; $\widehat{MBO} = 90^\circ$; $\widehat{MIO} = 90^\circ$ $\Rightarrow 5$ điểm: M, A, O, I, B cùng thuộc đường tròn đường kính MO Do $MA = MB$ (hai tiếp tuyến cắt nhau của (O))	

		Nên $\widehat{MA} = \widehat{MB} \Rightarrow \widehat{MBA} = \widehat{MIB}$ Xét $\angle MBK$ và $\angle MIB$ có: $\widehat{M}$ là góc chung $\widehat{MBK} = \widehat{MIB}$ $\Rightarrow \angle MBK = \angle MIB$ (g-g) $\Rightarrow \frac{MB}{MK} = \frac{MI}{MB} \Rightarrow MB^2 = MI \cdot MK$ (1) Xét $\angle MBC$ và $\angle MDB$ có: $\widehat{M}$ là góc chung $\widehat{MBC} = \widehat{MDB}$ (Góc tạo bởi tt và dây và góc nội tiếp chắn cung BC) $\Rightarrow \angle MBC = \angle MDB$ (g-g) $\Rightarrow \frac{MB}{MC} = \frac{MD}{MB} \Rightarrow MB^2 = MC \cdot MD$ (2) Từ (1) và (2) $\Rightarrow MC \cdot MD = MI \cdot MK$	0,25
5 (0,5)		$A = \frac{3}{a^2 + b^2} + \frac{4}{2ab} = \frac{3}{a^2 + b^2} + \frac{3}{2ab} + \frac{1}{2ab} = 3\left(\frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{2ab}\right) + \frac{1}{2ab}$ Áp dụng bất: $x^2 + y^2 \geq 2xy \Rightarrow (x + y)^2 \geq 4xy$ $\Rightarrow \frac{x+y}{xy} \geq \frac{4}{x+y} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$ ta có: $\frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{2ab} \geq \frac{4}{(a+b)^2}$ (1) Lại có: $(a+b)^2 \geq 4ab \Rightarrow 2ab \leq \frac{(a+b)^2}{2} \Rightarrow \frac{1}{2ab} \geq \frac{2}{(a+b)^2}$ (2) Từ (1) và (2) $\Rightarrow A \geq 3 \cdot \frac{4}{(a+b)^2} + \frac{2}{(a+b)^2} = \frac{14}{(a+b)^2} = 14$ hay $A \geq 14$ Dấu “=” xảy ra khi $a = b = \frac{1}{2}$ Vậy $\min(A) = 14$ khi $a = b = \frac{1}{2}$	0,25

Ghi chú: Học sinh làm cách khác đúng chấm điểm tương đương.