

Câu 1. (5 điểm)

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca + 2abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a(a+1)}{(2a+1)^2} + \frac{b(b+1)}{(2b+1)^2} + \frac{c(c+1)}{(2c+1)^2} \leq \frac{9}{16}.$$

Câu 2. (5 điểm)

Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ với hệ số thực sao cho $P(a)^2 + P(b)^2 + P(c)^2 = P(a+b+c)^2 + 2$ với mọi bộ số $(a; b; c)$ thỏa mãn $ab + bc + ca + 1 = 0$.

Câu 3. (5 điểm)

Tìm tất cả các bộ ba số tự nhiên $(m; n; k)$ thỏa mãn $5^m + 7^n = k^3$.

Câu 4. (5 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) , có trục tâm H . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB . Đường tròn (MNP) lần lượt cắt các đường tròn $(MCA), (MAB)$ tại điểm thứ hai là E, F . Giả sử ME, MF theo thứ tự cắt AC, AB tại K, L .

a) Chứng minh rằng OH vuông góc với KL tại điểm S .

b) Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC . Các điểm Y, Z lần lượt là hình chiếu của B, C lên AC, AB . Gọi X là giao điểm của KZ và LY . Chứng minh rằng A, G, S, X cùng nằm trên một đường tròn.

----- HẾT -----

<https://toanmath.com/>

+ Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính.

+ Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.