PHÒNG GD & ĐT YÊN THÀNH — **ĐỀ THI THỬ HỌC SINH GIỎI LỚP 9**

CỤM CHUYÊN MÔN SỐ 6 — **NĂM HỌC 2023-2024**

Môn: Toán học. *Thời gian làm bài 120 phút.*

Câu 1 (4,0 điểm).

a) Chứng minh rằng: $n^3 + 6n^2 + 8n$ chia hết cho 48 với n là số nguyên chẵn.

b) Cho 2 số tự nhiên a và b. Chứng minh rằng nếu tích a.b là số chẵn thì luôn luôn tìm được số nguyên c sao cho $a^2 + b^2 + c^2$ là số chính phương.

Câu 2 (6,0 điểm).

a) Cho ba số dương a , b , c thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng :

$$\sqrt{\frac{ab}{ab+c}}+\sqrt{\frac{bc}{bc+a}}+\sqrt{\frac{ac}{ac+b}}\le\frac{3}{2}$$

b) Giải phương trình: $\sqrt{x-1+2\sqrt{x-2}}+x+1=5\sqrt{x-2}$

c) Tìm các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $x^3+y^3+1=5xy$

Câu 3 (2,0 điểm).

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=(3+\frac{1}{a}+\frac{1}{b})(3+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})(3+\frac{1}{c}+\frac{1}{a})$

Trong đó các số dương a, b, c thoả mãn điều kiện $a+b+c\le\frac{3}{2}$

Câu 4 (7,0 điểm).

Cho tam giác ABC nhọn. Các đường cao AD; BE; CF cắt nhau tại H. Gọi M là trung điểm của HC; N là trung điểm của AC. AM cắt HN tại G. Đường thẳng qua M vuông góc với HC và đường thẳng qua N vuông góc với AC cắt nhau tại K. Chứng minh rằng:

a) Tam giác AEF đồng dạng với tam giác ABC.

Từ đó hãy suy ra $S_{AEF} = S_{ABC}.\cos^2\widehat{BAC}$

b) BH.KM = BA.KN

c) $\sqrt{\frac{GA^5+GB^5+GH^5}{GM^5+GK^5+GN^5}}=4\sqrt{2}$

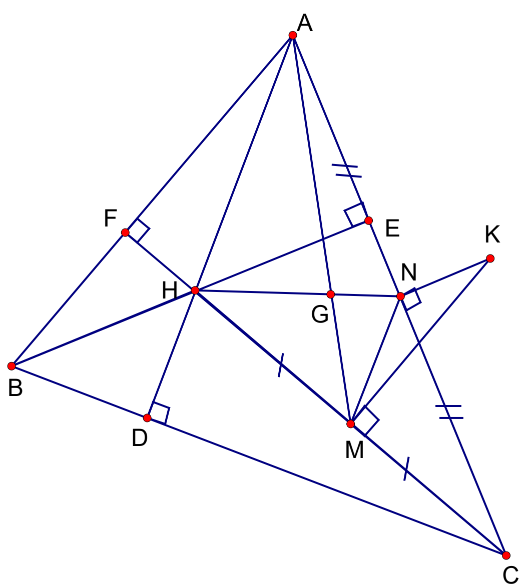
Câu 5 (1,0 điểm).

Cho bảng ô vuông kích thước 10cm x10cm gồm 100 ô vuông đơn vị. Điền vào mỗi ô vuông của bảng này một số nguyên dương không vượt quá 10 sao cho hai số ở hai ô vuông chung cạnh hoặc chung đỉnh nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng trong bảng ô vuông đã cho có một số xuất hiện ít nhất 17 lần.

HƯỚNG DẪN CHẤM

Câu	Nội dung	Điểm
		4,0
1 **a**	Ta có: $A = n^3 + 6n^2 + 8n$ $= n(n^2 + 6n + 8)$ $= n(n^2 + 4n + 2n + 8)$ $= n[n(n + 4) + 2(n + 4)]$ $= n(n + 2)(n + 4)$ Thay $n = 2k$ Ta có: $A = n(n + 2)(n + 4) = 8k(k + 1)(k + 2)$ Vì $8 \vdots 8$ và $k(k+1)(k+2) \vdots 6$ nên $A = 8k(k+1)(k+2) \vdots 48$	0,5 0,5 0,5 0,5
b	Đặt $A = a^2 + b^2 + c^2$. Do tích a.b chẵn nên ta xét các trường hợp sau: TH1: Trong 2 số a, b có 1 số chẵn và 1 số lẻ. Không mất tính tổng quát, giả sử a chẵn, b lẻ $\Rightarrow a^2 \vdots 4$; $b^2 : 4$ dư 1 $\Rightarrow a^2 + b^2 : 4$ dư 1 $\Rightarrow a^2 + b^2 = 4m + 1$ $(m \in N)$ Chọn $c = 2m \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 4m^2 + 4m + 1 = (2m + 1)^2$ (thoả mãn) (1) TH2: Cả 2 số a, b cùng chẵn. $\Rightarrow a^2 + b^2 \vdots 4 \Rightarrow a^2 + b^2 = 4n$ $(n \in N)$ Chọn $c = n - 1 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$ (thoả mãn) (2) Từ (1) và (2) ta luôn tìm $c \in Z$ thoả mãn bài toán.	0,5 0,5 0,5 0,5
2		***6,0***
a	$\sqrt{\frac{ab}{ab+c}} + \sqrt{\frac{bc}{bc+a}} + \sqrt{\frac{ac}{ac+b}} \le \frac{3}{2}$ Ta thấy $\sqrt{\frac{ab}{ab+c}} = \sqrt{\frac{ab}{ab+c(a+b+c)}} = \sqrt{\frac{ab}{(b+c)(a+c)}} \le \frac{1}{2}(\frac{a}{a+c} + \frac{b}{b+c})$ Tương tự $\sqrt{\frac{bc}{bc+a}} \le \frac{1}{2}(\frac{c}{a+c} + \frac{b}{b+a})$; $\sqrt{\frac{ac}{ac+b}} \le \frac{1}{2}(\frac{c}{b+c} + \frac{a}{b+a})$ Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên ta được : $\sqrt{\frac{ab}{ab+c}} + \sqrt{\frac{bc}{bc+a}} + \sqrt{\frac{ac}{ac+b}} \le \frac{3}{2}$	0,5 1 0,5
b	Phương trình: $\sqrt{x-1+2\sqrt{x-2}} + x + 1 = 5\sqrt{x-2}$ Điều kiện: $x \ge 2$ Ta có:	0,25 0,5

	$\sqrt{x-1+2\sqrt{x-2}}+x+1=5\sqrt{x-2}$	
	$\Leftrightarrow \sqrt{x-2+2\sqrt{x-2}+1}+x+1=5\sqrt{x-2}$	
	$\Leftrightarrow \sqrt{\left(\sqrt{x-2}+1\right)^2}+x+1-5\sqrt{x-2}=0$	0,5
	$\Leftrightarrow \sqrt{x-2}+1+x+1-5\sqrt{x-2}=0$	0,5
	$\Leftrightarrow x-2-4\sqrt{x-2}+4=0$	0,25
	$\Leftrightarrow (\sqrt{x-2}-2)^2=0 \Leftrightarrow x=6(tmdk)$	
	Vậy nghiệm của pt là: $x=6$	
c	$x^3+y^3+1=5xy$	
	$\Leftrightarrow (x+y)^3-3xy(x+y)+1=5xy$	0,25
	Đặt $x+y=a, xy=b$ ta được $a^3-3ab+1=5b \Leftrightarrow a^3+1=b(3a+5)$	
	Vì $3a+b\neq 0$ với $\forall a\in Z$ Suy ra $b=\dfrac{a^3+1}{3a+5}$	0,25
	Ta có $a^2-4b=(x-y)^2\geq 0\forall x,y$ Suy ra $a^2-\dfrac{4a^3+4}{3a+5}\geq 0 \Rightarrow \dfrac{-a^3+5a^2-4}{3a+5}\geq 0$	0,25
	Nếu $a\geq 5 \Rightarrow -a^3+5a^3-4=a^2(5-a)-4<0; 3a+5>0$	
	Suy ra: $\dfrac{-a^3+5a^2-4}{3a+5}<0$ (loại)	0,25
	Nếu $a\leq -2 \Rightarrow a^2(5-a)\geq 28 \Rightarrow -a^3+5a^2-4>0; 3a+5<0$	
	Suy ra: $\dfrac{-a^3+5a^2-4}{3a+5}<0$ (loại)	
	Nếu $-2<a<5$ mà a nguyên nên a nhận các giá trị: -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5	0,25
	Do b nguyên và $b=\dfrac{a^3+1}{3a+5}$ nên tìm được các cặp số (a;b) thoã mãn: (-1;0) ; (3;2)	0,25
	Với a = -1; b = 0, tìm được các cặp (x;y) thoã mãn: (0;-1); (-1;0)	
	Với a = 3 ; b = 2, tìm được các cặp (x;y) thoã mãn: (1;2); (2;1)	0,25
	Vậy các cặp số (x;y) thỏa mãn: (0;-1); (-1;0); (1;2); (2;1)	0,25
3		***2,0***
	Đặt $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=x$; $\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=y$; $\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}=z \Rightarrow (x, y, z>0)$	0,25
	$\Rightarrow P=(3+x)(3+y)(3+z)$	
	$=27+3(xy+yz+zx)+9(x+y+z)+xyz$	

	$\geq 27 + 9\sqrt[3]{(xyz)^2} + 27\sqrt[3]{xyz} + xyz \quad (*)$ Lại có: $xyz = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right) \geq \frac{8}{abc}$ (vì a, b, c > 0) mà $\frac{3}{2} \geq a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} \Rightarrow \frac{1}{2} \geq \sqrt[3]{abc}$ $\Rightarrow abc \leq \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{8}{abc} \geq 64 \Rightarrow xyz \geq \frac{8}{abc} \geq 64$ Thay vào (*) ta được: $P \geq 27 + 9\sqrt[3]{64^2} + 27\sqrt[3]{64} + 64$ $= 27 + 144 + 108 + 64 = 343$ Dấu = có khi $a = b = c = \frac{1}{2} \Rightarrow P_{min} = 343$ Khi $a = b = c = \frac{1}{2}$	0,5 0,5 0,25 0,25 0,25
4		***7,0***
		*0,5*
a)	ΔAEB vuông tại E nên $\cos\widehat{BAE} = \frac{AE}{AB}$; ΔACF vuông tại F nên $\cos\widehat{CAF} = \frac{AF}{AC}$ Từ đó chứng minh được tam giác AEF đồng dạng với tam giác ABC (c.g.c) Vì tam giác AEF đồng dạng với tam giác ABC nên: $\frac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \frac{AE^2}{AB^2} = \cos^2\widehat{BAC} \Rightarrow S_{AEF} = S_{ABC}.\cos^2\widehat{BAC}$	0,5 0,5 0,5 0,5 0,5

b)	ΔABH và ΔMNK có $\widehat{BAH}=\widehat{NMK}$; $\widehat{ABH}=\widehat{MKN}$ (Góc có cạnh tương ứng song song) Suy ra ΔAHB đồng dạng với ΔMNK (g.g) Suy ra: $\frac{BA}{KM}=\frac{BH}{KN}\Rightarrow BA.KN=BH.KM$	0,5 0,5 0,5 0,5
c)	ΔAHB đồng dạng với ΔMNK nên $\frac{AB}{MK}=\frac{AH}{MN}=2$ (Vì MN là đường TB của tam giác AHC); Lại có: $\frac{AG}{MG}=2$; $\frac{HG}{NG}=2$ (G là trọng tâm của tam giácAHC) $\Rightarrow \frac{AB}{MK}=\frac{AG}{MG}=2$. Mặt khác $\widehat{BAG}=\widehat{GMK}$ (so le trong) $\Rightarrow \Delta ABG$ đồng dạng với tam giác ΔMKG (c.g.c) $\Rightarrow \frac{GB}{GK}=\frac{GA}{GM}=\frac{GH}{GN}=2\Rightarrow \frac{GB^5}{GK^5}=\frac{GA^5}{GM^5}=\frac{GH^5}{GN^5}=\frac{GB^5+GA^5+GH^5}{GK^5+GM^5+GN^5}=32$ $\Rightarrow \sqrt{\frac{GB^5+GA^5+GH^5}{GK^5+GM^5+GN^5}}=4\sqrt{2}$	0,5 0,5 0,5 0,5
5		***1,0***
	Xét hình vuông cạnh 2x2, do hình vuông này có mỗi hình vuông nhỏ luôn chung cạnh hoặc chung đỉnh nên tồn tại nhiều nhất 1 số chẵn, nhiều nhất 1 số chia hết cho 3 do đó có ít nhất 2 số lẻ không chia hết cho 3. Bảng 10x10 được chia thành 25 hình vuông có cạnh 2x2 nên có ít nhất 50 số lẻ không chia hết cho 3. Từ 1 đến 10 có 3 số lẻ không chia hết cho 3 là 1, 5, 7. Áp dụng nguyên lí Dirichlet ta được một trong ba số trên xuất hiện ít nhất $\left[\frac{50}{3}\right]+1=17$ lần	0,25 0,25 0,25 0,25