

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn thi : Toán
Thời gian làm bài : 120 phút
(không kể thời gian giao đề)

Bài 1: (5 điểm)

1. Tìm số tự nhiên n để biểu thức sau là số nguyên tố $12n^2 - 5n - 25$
2. Giải phương trình:
 - a) $x^3 + 9x^2 + 11x - 21 = 0$
 - b) $\sqrt{2x - x^2 - 1} = 2x - x^2 - 1$

Bài 2: (4 điểm)

1. Tìm số nguyên dương x, y sao cho: $x^3 + y^3 + 4(x^2 + y^2) + 4(x + y) = 16xy$

2. Cho a, b, x, y thỏa mãn:
$$\begin{cases} \frac{x^4}{a} + \frac{y^4}{b} = \frac{1}{a+b} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Chứng minh rằng:
$$\frac{x^{2016}}{a^{1008}} + \frac{y^{2016}}{b^{1008}} = \frac{2}{(a+b)^{1008}}$$

Bài 3: (5 điểm)

1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = \frac{27 - 12x}{x^2 + 9}$
2. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc = 1$
Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{a^2 + 2b^2 + 3} + \frac{1}{b^2 + 2c^2 + 3} + \frac{1}{c^2 + 2a^2 + 3}$$

Bài 4: (5 điểm)

Cho tam giác ABC. Gọi P là giao điểm của ba đường phân giác trong của tam giác đó. Đường thẳng qua P và vuông góc với CP, cắt CA và CB theo thứ tự tại M và N. Chứng minh:

- a) $\triangle AMP \sim \triangle APB$
- b) $\frac{AM}{BN} = \left(\frac{AP}{BP}\right)^2$
- c) $BC \cdot AP^2 + AC \cdot BP^2 + AB \cdot CP^2 = AB \cdot AC \cdot BC$

Bài 5: (1 điểm)

Chứng minh rằng giữa ba số nguyên tố lớn hơn 3 luôn tìm được hai số có tổng hoặc hiệu chia hết cho 12.

----- **Hết** -----
(Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm)

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 1 (5 điểm)	1, $A = 12n^2 - 5n - 25 = (4n + 5)(3n - 5)$ A là số nguyên tố và $4n + 5 > 0 \rightarrow 3n - 5 > 0, 4n + 5 > 3n - 5$ $\rightarrow A$ là số nguyên tố $\rightarrow 3n - 5 = 1 \rightarrow n = 2$ Có $A = 12.2^2 - 5.2 - 25 = 13$ là số nguyên tố 2, a/ $x^3 + 9x^2 + 11x - 21 = 0$ $\Leftrightarrow (x^3 - 1) + (9x^2 - 9) + (11x - 11) = 0$ $\Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x + 1) + 9(x + 1)(x - 1) + 11(x - 1) = 0$ $\Leftrightarrow (x - 1)(x + 3)(x + 7) = 0$ $\rightarrow x = 1$ hoặc -3 hoặc -7 b/ $2x - x^2 - 1 = 2x - x^2 - 1$ Do $2x - x^2 - 1 = -(x - 1)^2 \leq 0$ Pt $\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 2x - x^2 - 1$ $\Leftrightarrow x = 1$	0,5đ. 0,5đ. 1,0đ. 1,0đ. 1,0đ. 1,0đ.
Câu 2 (4 điểm)	1) pt $= (x^3 - 4x^2 + 4x) + (y^3 - 4y^2 + 4y) + (8x^2 + 8y^2 - 16xy) = 0$ $\Leftrightarrow x(x - 2)^2 + y(y - 2)^2 + 8(x - y)^2 = 0 \quad (1)$ Do $x(x - 2)^2 \geq 0, y(y - 2)^2 \geq 0, 8(x - y)^2 \geq 0 \quad (2)$ Từ (1), (2) $\rightarrow x = y = 2$ 2) $\begin{cases} \frac{x^4}{a} + \frac{y^4}{b} = \frac{1}{a+b} & (1) \\ x^2 + y^2 = 1 & (2) \end{cases}$ Thay (1) $= (x^2 + y^2)^2$ vào (1) có $\frac{x^4}{a} + \frac{y^4}{b} = \frac{(x^2 + y^2)^2}{a+b}$... $\Leftrightarrow bx^2 = ay^2 \rightarrow \frac{x^2}{a} = \frac{y^2}{b} = \frac{x^2 + y^2}{a+b} = \frac{1}{a+b}$ $\rightarrow \frac{x^{2016}}{a^{1008}} = \frac{y^{2016}}{b^{1008}} = \frac{1}{(a+b)^{1008}}$ $\rightarrow \frac{x^{2016}}{a^{1008}} + \frac{y^{2016}}{b^{1008}} = \frac{2}{(a+b)^{1008}}$	1,5đ. 1,5đ. 0,5đ. 0,5đ.

Câu 3 (5 điểm)	1) $A = \frac{27-12x}{x^2+9} = \frac{(x^2-12x+36)-(x^2+9)}{x^2+9} = \frac{(x-6)^2}{x^2+9} - 1 \geq -1$ $\rightarrow \text{Min } A = -1 \Leftrightarrow x = 6$ 2) Có $(x-y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy$ Áp dụng ta có: $a^2 + b^2 \geq 2ab, b^2 + 1 \geq 2b$ $\rightarrow a^2 + 2b^2 + 3 \geq 2(ab + b + 1) \rightarrow \frac{1}{a^2 + 2b^2 + 3} \leq \frac{1}{2(ab + b + 1)}$ Tương tự: $\frac{1}{b^2 + 2c^2 + 3} \leq \frac{1}{2(bc + c + 1)}, \frac{1}{c^2 + 2a^2 + 3} \leq \frac{1}{2(ac + a + 1)}$ $P \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{ab + b + 1} + \frac{1}{bc + c + 1} + \frac{1}{ac + a + 1} \right)$ $= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{ab + b + 1} + \frac{ab}{b + 1 + ab} + \frac{b}{1 + ab + b} \right)$ $= \frac{1}{2} \cdot \frac{ab + b + 1}{ab + b + 1} = \frac{1}{2} \quad (\text{Do } abc = 1)$ $\rightarrow P_{\max} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = b = c = 1$	2,0đ. 0,5đ. 0,5đ. 1,0đ 1,0đ.
Câu 4 (5 điểm)	a) $\widehat{AMP} = \hat{C}_1 = 90^\circ$ $\widehat{APB} = 180^\circ - \left(\frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} \right)$ $= 180^\circ - \frac{\hat{A} + \hat{B}}{2}$ $= 180^\circ - \frac{180^\circ + \hat{C}}{2}$ $= 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{\hat{C}}{2} \right)$ $= 90^\circ + \frac{\hat{C}}{2}, \hat{A}_1 = \hat{A}_2$ $\rightarrow \Delta AMP \sim \Delta APB$ (g.g) b) Tương tự $\Delta APB \sim \Delta PNB$ $\rightarrow \frac{AM}{MP} = \frac{AP}{PB} = \frac{PN}{NB} \rightarrow \frac{AM}{MP} \cdot \frac{PN}{NB} = \left(\frac{AP}{BP} \right)^2 \rightarrow \frac{AM}{NB} = \left(\frac{AP}{BP} \right)^2$	0,5đ. 1,5đ. 0,5đ. 1,5đ.

	c) $\Delta AMP \sim \Delta PNB \rightarrow \frac{AM}{MP} = \frac{PN}{NB}$ $\rightarrow AM \cdot NB = PN \cdot MP = MP^2$ $\rightarrow AM \cdot NB = CM^2 - CP^2 = (CA - AM)(CB - BN) - CP^2$ $= CA \cdot CB - CA \cdot BN - AM \cdot CB + AM \cdot BN - CP^2$ $\rightarrow AM \cdot CB + BN \cdot CA + CP^2 = CA \cdot CB$ $\rightarrow AM \cdot CB \cdot AB + BN \cdot CA \cdot AB + CP^2 \cdot AB = AB \cdot BC \cdot CA \quad (1)$ Từ $\Delta AMP \sim \Delta APB \rightarrow \frac{AM}{AP} = \frac{AP}{AB} \rightarrow AM \cdot AB = AP^2 \quad (2)$ Tương tự $\frac{BN}{BP} = \frac{BP}{AB} \rightarrow BN \cdot AB = BP^2 \quad (3)$ Từ (1), (2), (3) $\rightarrow$ đpcm	0,5đ. 0,5đ.
Câu 5 (1 điểm)	Một số nguyên tố lớn hơn 3 khi chia cho 12 thì chỉ có thể có số dư là 1; 5; 7; 11 chia tập hợp số nguyên tố thành 2 tập hợp con. A là tập hợp số nguyên tố chia 12 dư 1 hoặc 11, B là tập hợp số nguyên tố chia 12 dư 5 hoặc 7. Vì có 3 số nguyên tố mà chỉ thuộc một trong 2 tập hợp A hoặc B. Nên theo nguyên tắc Dirichle phải có 2 số thuộc cùng một tập hợp, 2 số này có tổng hoặc hiệu chia hết cho 12	1,0đ.

***Chú ý :** Học sinh có thể giải cách khác, nếu chính xác thì vẫn cho điểm.