

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

Câu 1. (5 điểm)

- a) Giải phương trình lượng giác: $\sin x + \sin 5x = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right)$.
- b) Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = 2\sin^2 x + 3\sin x \cos x + 5\cos^2 x$.

Câu 2. (4 điểm)

- a) Cho $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ hãy tính tổng S sau: $S = 2.1C_n^2 + 3.2C_n^3 + 4.3C_n^4 + \dots + n(n-1)C_n^n$.
- b) Ba bạn A, B, C mỗi bạn viết ngẫu nhiên lên bảng một số tự nhiên thuộc đoạn $[1; 20]$.
Tính xác suất để tổng các lập phương của ba số được viết ra chia hết cho 3.

Câu 3. (5 điểm)

- a) Một tứ giác có bốn góc tạo thành một cấp số nhân và số đo góc lớn nhất gấp 8 lần số đo góc nhỏ nhất. Tính số đo các góc của tứ giác.
- b) Cho dãy số (u_n) được xác định bởi
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3^n, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Tìm công thức của số hạng tổng quát u_n theo n .

Câu 4. (5 điểm)

Cho mặt phẳng (α) và hai đường thẳng chéo nhau d_1, d_2 cắt (α) tại A, B . Gọi Δ là đường thẳng thay đổi luôn song song với (α) , cắt d_1 tại M , cắt d_2 tại N . Đường thẳng d qua N luôn song song với d_1 cắt (α) tại N' .

- a) Tứ giác $AMNN'$ là hình gì?
- b) Tìm tập hợp các điểm N' .
- c) Gọi O là trung điểm của AB , I là trung điểm của MN . Chứng minh rằng OI là đường thẳng cố định khi M di động.

Câu 5. (1 điểm)

Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện: $xyz = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức H biết:

$$H = \frac{x^2(y+z)}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}} + \frac{y^2(z+x)}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}} + \frac{z^2(x+y)}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}.$$

----- HẾT -----

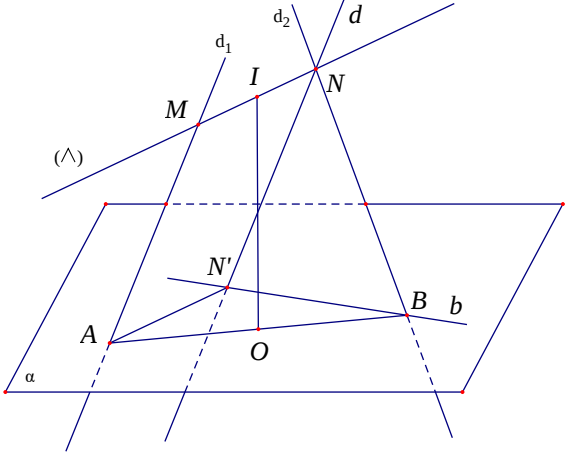
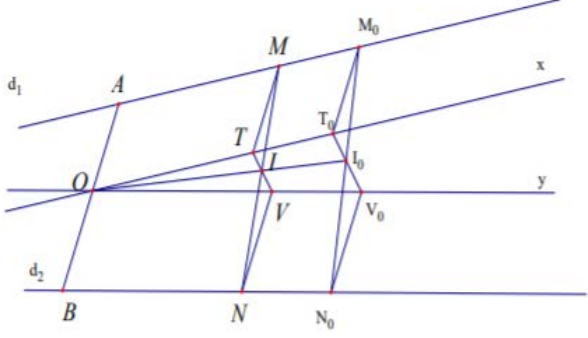
HƯỚNG DẪN CHẤM THI OLYMPIC MÔN TOÁN LỚP 11

Câu 1 5,0 đ	Nội dung	Điểm
a) 3,0 đ	$PT \Leftrightarrow \sin x + \sin 5x = \left[1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \right] + \left[1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} + 4x\right) \right]$	0,5 đ
	$\Leftrightarrow \sin x + \sin 5x = \sin 2x + \sin 4x$	0,5 đ
	$\Leftrightarrow 2 \sin 3x \cos 2x = 2 \sin 3x \cos x$	0,5 đ
	$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 3x = 0 \\ \cos 2x = \cos x \end{cases}$	0,5 đ
	$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = k\pi \\ 2x = x + k2\pi \\ 2x = -x + k2\pi \end{cases}$	0,5 đ
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{3} \\ x = k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{3} \\ x = \frac{k2\pi}{3} \end{cases}$	0,5 đ
b) 2,0 đ	$y = 2 \sin^2 x + 3 \sin x \cos x + 5 \cos^2 x$ $= (1 - \cos 2x) + \frac{3}{2} \sin 2x + 5 \cdot \frac{(1 + \cos 2x)}{2}$ $= \frac{3}{2} \cos 2x + \frac{3}{2} \sin 2x + \frac{7}{2}$	0,5 đ
	$= \frac{3\sqrt{2}}{2} \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{7}{2}$	0,5 đ
	Giá trị nhỏ nhất của hàm số : $y_{\min} = \frac{7}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}$ đạt được tại $x = \frac{5\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$	0,5 đ
	Giá trị lớn nhất của hàm số : $y_{\max} = \frac{7}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}$ đạt được tại $x = \frac{\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$	0,5 đ

Câu 2 4,0 đ	Nội dung	Điểm
a) 2,0 đ	Số hạng tổng quát $u_k = k(k-1)C_n^k$	0,5 đ
	$u_n = k(k-1) \frac{n!}{k!(n-k)!}$ $= \frac{n(n-1)(n-2)!}{(k-2)![(n-2)-(k-2)]!}$ $= n(n-1)C_{n-2}^{k-2} (2 \leq k \leq n)$	0,5 đ
	$S = n(n-1)(C_{n-2}^0 + C_{n-2}^1 + C_{n-2}^3 + \dots + C_{n-2}^{n-2})$	0,5 đ
	$S = n(n-1).2^{n-2}$	0,5 đ
	b)	

2,0 đ	Số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega) = 20^3$	0,25 đ
	Đoạn $[1; 20]$ có 6 số chia hết cho 3; có 7 số chia cho 3 dư 1; 7 số chia cho 3 dư 2.	0,25 đ
	Với mọi số tự nhiên n ta luôn có $n^3 - n = n(n-1)(n+1):3$. Do đó tổng lập phương của ba số chia hết khi và chỉ khi tổng của ba số đó chia hết cho 3.	0,5 đ
	TH1: Cả 3 số được viết chia hết cho 3: có 6^3 khả năng xảy ra TH2: Cả 3 số được viết chia cho 3 dư 1: có 7^3 khả năng xảy ra. TH3: Cả 3 số đều chia cho 3 dư 2 : có 7^3 khả năng xảy ra. TH4: Cả 3 số được viết gồm 1 số chia hết cho 3; 1 số chia 3 dư 1 và 1 số chia 3 dư 2: có $6.7.7.3!$ khả năng xảy ra	0,5 đ
	Số kết quả thuận lợi là $6^3 + 7^3 + 7^3 + 6.7.7.3! = 2666$	0,25 đ
	Xác suất cần tính là $P = \frac{6^3 + 7^3 + 7^3 + 6.7.7.3!}{20^3} = \frac{1333}{4000}$	0,25 đ

Câu 3 5,0 đ	Nội dung	Điểm
a) 2,5 đ	Giả sử bốn góc A, B, C, D ($A < B < C < D$) theo thứ tự lập thành cấp số nhân với công bội q . Ta có $\begin{cases} B = qA \\ C = q^2 A \\ D = q^3 A \end{cases}$	0,5 đ
	Ta có hệ $\begin{cases} A + B + C + D = 360^\circ \\ D = 8A \end{cases}$	0,5 đ
	$\Leftrightarrow \begin{cases} A(1 + q + q^2 + q^3) = 360^\circ \\ A.q^3 = 8A \end{cases}$	0,5 đ
	$\Leftrightarrow \begin{cases} q = 2 \\ A = 24^\circ \end{cases}$	0,5 đ
	Suy ra $B = 48^\circ, C = 96^\circ, D = 192^\circ$	0,5 đ
b) 2,5 đ	Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có : $u_{n+1} = 2u_n + 3^n \Leftrightarrow u_{n+1} - 3^{n+1} = 2(u_n - 3^n)$	0,5 đ
	Xét dãy số (v_n) , với $v_n = u_n - 3^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. ta có $v_{n+1} = 2v_n$. Do đó, dãy số (v_n) là 1 cấp số nhân có công bội $q = 2$ và số hạng đầu bằng -2	0,5 đ 0,5 đ
	Suy ra $v_n = v_1 \cdot q^{n-1} = -2^n$	0,5 đ
	Vậy $u_n = v_n + 3^n = 3^n - 2^n$	0,5 đ

Câu 4 5,0 đ	Nội dung	Điểm
a) 2,0 đ		0,5 đ
	Có $AM \parallel NN'$ Do $d \parallel d_1$ nên tồn tại mặt phẳng (β) chứa d và d_1	0,5 đ
	$\begin{cases} (\alpha) \cap (\beta) = AN' \\ MN \subset (\beta), MN \parallel (\alpha) \end{cases} \Rightarrow AN' \parallel MN.$	0,5 đ
	$\Rightarrow AMNN'$ là hình bình hành	0,5 đ
b) 2,0 đ	Gọi (P) là mặt phẳng chứa d và d_2, vì $d \parallel d_1$ nên $(P) \parallel d_1$.	0,5 đ
	Do (P) chứa đường thẳng cố định d_2 và song song với đường thẳng cố định d_1 nên (P) cố định.	0,5 đ
	N' là điểm chung của (α) và (P) nên $N' \in (\alpha) \cap (P)$	0,5 đ
	Gọi $(\alpha) \cap (P) = b$. Vậy tập hợp các điểm N' là đường thẳng b.	0,5 đ
c) 1,0 đ	$\Rightarrow OI, d_1, d_2$ cùng song song với một mặt phẳng Qua O dựng hai đường thẳng $Ox \parallel d_1$ và $Oy \parallel d_2$ thì mặt phẳng (Oxy) song song với d_1 và d_2 suy ra OI chứa trong mặt phẳng (Oxy) và I là giao điểm của MN với (Oxy). Dựng mặt phẳng (Q) chứa MN và song song với (α) cắt Ox, Oy lần lượt tại T, V, ta có: T, I, V là ba điểm chung của (Q) và (α) nên chúng thẳng hàng. $\Rightarrow I$ cũng là trung điểm của TV	0,5 đ
	Dựng đường thẳng qua E và song song với d_1 cắt d_2 tại N_0, Dựng đường thẳng Δ_0 qua N_0 song song với AE, đường thẳng này cắt d_1 tại M_0. Dựng mặt phẳng (Q_0) chứa M_0N_0 và song song (α) (M_0N_0 là vị trí đặc biệt của M ở câu b), (Q_0) cắt Ox, Oy lần lượt tại T_0, V_0, gọi I_0 là trung điểm của M_0N_0 thì I_0 cũng là trung điểm của T_0V_0.  Vì $(Q) \parallel (Q_0), (Q) \cap (Oxy) = TV, (Q_0) \cap (Oxy) = T_0V_0$ nên $TV \parallel T_0V_0$ suy ra O, I, I_0 thẳng hàng, lại có O, I_0 cố định do đó đường thẳng OI cố định.	0,5 đ

5 1,0 đ	Nội dung	Điểm
	Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có: $H \geq \frac{x^2 2\sqrt{yz}}{y\sqrt{y} + 2z\sqrt{z}} + \frac{y^2 2\sqrt{zx}}{z\sqrt{z} + 2x\sqrt{x}} + \frac{z^2 2\sqrt{xy}}{x\sqrt{x} + 2y\sqrt{y}}$ $= \frac{2x\sqrt{x}\sqrt{xyz}}{y\sqrt{y} + 2z\sqrt{z}} + \frac{2y\sqrt{y}\sqrt{xyz}}{z\sqrt{z} + 2x\sqrt{x}} + \frac{2z\sqrt{z}\sqrt{xyz}}{x\sqrt{x} + 2y\sqrt{y}}$ $= \frac{2x\sqrt{x}}{y\sqrt{y} + 2z\sqrt{z}} + \frac{2y\sqrt{y}}{z\sqrt{z} + 2x\sqrt{x}} + \frac{2z\sqrt{z}}{x\sqrt{x} + 2y\sqrt{y}}$	0,25 đ
	Đặt: $\begin{cases} a = y\sqrt{y} + 2z\sqrt{z} \\ b = z\sqrt{z} + 2x\sqrt{x} \\ c = x\sqrt{x} + 2y\sqrt{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\sqrt{x} = \frac{1}{9}(-2a + 4b + c) \\ y\sqrt{y} = \frac{1}{9}(a - 2b + 4c) \\ z\sqrt{z} = \frac{1}{9}(4a + b - 2c) \end{cases}$	0,25 đ
	Khi đó $H \geq \frac{2}{9} \left(\frac{-2a + 4b + c}{a} + \frac{a - 2b + 4c}{b} + \frac{4a + b - 2c}{c} \right)$ $= \frac{2}{9} \left[-6 + 4 \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{a} \right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{b} + \frac{b}{c} \right) \right]$ $\geq \frac{2}{9} \left[-6 + 4 \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{a}} + 3 \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{c}{a} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c}} \right]$ $= 2$	0,25 đ
	$H = 2$ khi $a = b = c \Rightarrow x = y = z = 1$. Vậy giá trị nhỏ nhất của H bằng 2.	0,25 đ

Chú ý: Nếu học sinh làm theo cách giải khác ngoài đáp án và vẫn đúng thì vẫn cho điểm tối đa của câu đó.