

Câu 1 (6,0 điểm).

a) Giải phương trình: $2(\sin x + 3)\cos^4 \frac{x}{2} - \sin x(1 + \cos x) - 3\cos x - 1 = 0.$

b) Giải bất phương trình: $(x+1)(\sqrt{x^2+2} + \sqrt{x^2+2x+3}) > \sqrt{x^2+2} - 2x - 1$

Câu 2 (3,0 điểm).

Cho đa giác lồi (H) có 22 cạnh. Gọi X là tập hợp các tam giác có ba đỉnh là ba đỉnh của (H). Chọn ngẫu nhiên 2 tam giác trong X, tính xác suất để chọn được 1 tam giác có 1 cạnh là cạnh của đa giác (H) và 1 tam giác không có cạnh nào là cạnh của đa giác (H).

Câu 3 (2,0 điểm). Cho dãy số (u_n) xác định bởi:

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ n(n^2 - 1)u_n = u_1 + 2u_2 + \dots + (n-1)u_{n-1}, \quad \forall n > 1, n \in \mathbb{N}. \end{cases} \text{ . Tìm } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9}{2}(n^3 - n)u_n.$$

Câu 4 (5,0 điểm). Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Các điểm H, K lần lượt là trung điểm của AD, C'D'. Điểm M thuộc đoạn BC', N thuộc đoạn AB'. Đường thẳng MN tạo với mặt phẳng (ABCD) một góc 45° .

a) Chứng minh rằng: $AK \perp BH$;

b) Chứng minh rằng: $MN \geq (2 - \sqrt{2})a$.

Câu 5 (2,0 điểm). Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC; đường thẳng AD là phân giác trong góc A. Trên đoạn AD lấy hai điểm M, N (M, N khác A và D) sao cho $\widehat{ABN} = \widehat{CBM}$. Đường thẳng CN cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABN tại điểm F; biết phương trình FA là $x + y - 8 = 0$ và $M(-3; -1), B(-4; -2)$. Xác định tọa độ điểm A biết đường tròn ngoại tiếp tam giác AMC đi qua điểm $Q(0; \sqrt{22})$.

Câu 6 (2,0 điểm).

Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng :

$$\frac{a}{b^2 + c^2 + 2} + \frac{b}{c^2 + a^2 + 2} + \frac{c}{a^2 + b^2 + 2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

..... Hết

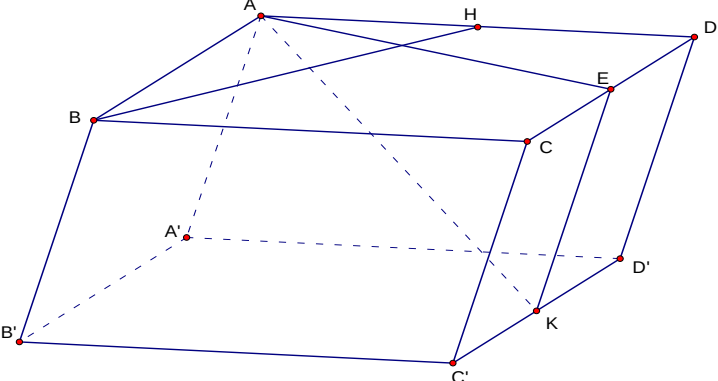
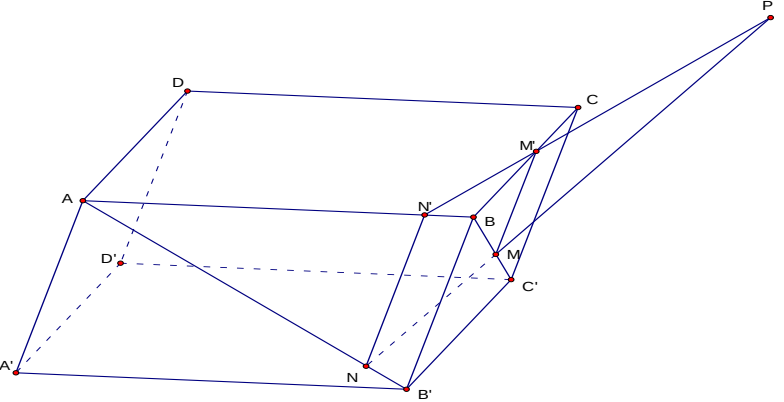
Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.

Họ và tên thí sinh..... Số báo danh.....

HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ THI KSCL ĐỘI TUYỂN HSG CỤM THPT YÊN THÀNH

(Hướng dẫn chấm này gồm 04 trang)

Câu	Nội dung	Điểm
1. (6,0đ)	a.	3,0
	$Pt \Leftrightarrow 2(\sin x + 3)\cos^4 \frac{x}{2} - 2\sin x \cdot \cos^2 \frac{x}{2} - 6\cos^2 \frac{x}{2} + 2 = 0$	0,5
	$\Leftrightarrow (\sin x + 3)\cos^4 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2}(\sin x + 3) + 1 = 0$	0,5
	$\Leftrightarrow \cos^2 \frac{x}{2}(\sin x + 3)(\cos^2 \frac{x}{2} - 1) + 1 = 0$	0,5
	$\Leftrightarrow -\frac{1}{4}(\sin x + 3)\sin^2 x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin^3 x + 3\sin^2 x - 4 = 0$	0,5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin x = -2(vn) \end{cases}$	0,5
	$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$	0,5
	b.	3,0
	Đặt: $\begin{cases} a = \sqrt{x^2 + 2} & (a \geq \sqrt{2}) \\ b = \sqrt{x^2 + 2x + 3} & (b \geq \sqrt{2}) \end{cases} \Rightarrow x = \frac{b^2 - a^2 - 1}{2}$	0,5
	BPT trở thành: $b^2 - a^2 + \frac{1}{2}(b^2 - a^2 - 1)a + \frac{1}{2}(b^2 - a^2 + 1)b > 0$	1,0
	$\Leftrightarrow (b - a)(b + a + 1)^2 > 0$	0,5
	$\Leftrightarrow b > a \text{ hay } \sqrt{x^2 + 2x + 3} > \sqrt{x^2 + 2}$	0,5
	$\Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$. Vậy tập nghiệm của bpt là: $S = (-\frac{1}{2}; +\infty)$	0,5
2. (3,0đ)	+) Đa giác lồi (H) có 22 cạnh nên có 22 đỉnh. +) Số tam giác có 3 đỉnh là ba đỉnh của đa giác (H) là $C_{22}^3 = 1540$.	0,5
	+) Số phần tử của không gian mẫu Ω là $n(\Omega) = C_{1540}^2 = 1185030$	0,5
	Số tam giác có một cạnh là cạnh của đa (H) là $22 \cdot 18 = 396$ +) Số tam giác có hai cạnh là cạnh của đa (H) là 22	0,5
	Số tam giác không có cạnh nào là cạnh của đa (H) là: $1540 - 396 - 22 = 1122$ +) Gọi A là biến cố “ hai tam giác được chọn có một tam giác có 1 cạnh là cạnh của (H) và 1 tam giác không có cạnh nào là cạnh của (H)”	0,5
	Số phần tử của A là $n(A) = C_{396}^1 \cdot C_{1122}^1$	0,5
	Xác suất của biến cố A là $p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{C_{396}^1 \cdot C_{1122}^1}{1185030} = \frac{748}{1995}$	0,5
3. (2,0đ)	Ta có: $u_2 = \frac{1}{3}$ Với $n \geq 3$, ta có: $u_1 + 2u_2 + \dots + nu_n = n^3 u_n$ (1) $u_1 + 2u_2 + \dots + (n-1)u_{n-1} = (n-1)^3 u_{n-1}$ (2)	0,5

	Từ (1) và (2), suy ra: $nu_n = n^3 u_n - (n-1)^3 u_{n-1}$ $\Rightarrow u_n = \frac{(n-1)^3}{n^3 - n} u_{n-1} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \cdot \frac{n}{n+1} u_{n-1}$ $\Rightarrow u_n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \cdot \left(\frac{n-2}{n-1}\right)^2 \dots \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n-1}{n} \dots \frac{3}{4} u_2$ $\Rightarrow u_n = \frac{4}{n^2(n+1)}$ Do đó: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9}{2} (n^3 - n) u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 18 \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 18.$	0,5
		0,5
		0,5
4.	a.	3,0
(5,0đ)	 Gọi E là trung điểm của cạnh CD, ta có: $KE \perp (ABCD) \Rightarrow KE \perp BH$ (1) Mặt khác, ta có: $\triangle ABH = \triangle DAE$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{ABH} = \widehat{DAE}$ $\Rightarrow \widehat{AHB} + \widehat{HAE} = \widehat{AHB} + \widehat{ABH} = 90^\circ$ $\Rightarrow BH \perp AE$ (2) Từ (1) và (2), suy ra: $BH \perp (AEK) \Rightarrow BH \perp AK$	1,0
		0,5
		0,5
		0,5
		0,5
	b.	2,0
	 Gọi M', N' lần lượt là hình chiếu của M, N trên (ABCD). Không mất tính tổng quát giả sử $MM' < NN'$. Gọi $P = MN \cap M'N'$, khi đó: $(\widehat{MN}, (ABCD)) = \widehat{MPM'} = 45^\circ, MM' = BM', NN' = AN' = a - BN', MN = PN - PM$ $\Rightarrow MN \cos 45^\circ = PN \cos 45^\circ - PM \cos 45^\circ = PN' - PM' = M'N'$ (1) Do đó: $M'N' = \sqrt{BN'^2 + BM'^2} = MN \cos 45^\circ$ Ta có: $MN \sin 45^\circ = PN \sin 45^\circ - PM \cos 45^\circ = NN' - MM' = a - (BN' + BM')$ (2)	0,5

	Từ (1) và (2) suy ra: $MN(\sqrt{2}\cos 45^0 + \sin 45^0) = \sqrt{2(BN'^2 + BM'^2)} + a - (BN' + BM')$ $\geq (BN' + BM') + a - (BN' + BM') = a$ (BĐT Bunhiacôpxki) $\Rightarrow MN \geq (2 - \sqrt{2})a$	0,5
5. (2,0đ)	Gọi E là giao điểm thứ hai của BM và đường tròn ngoại tiếp tam giác AMC. Ta chứng minh E thuộc AF. Thật vậy tứ giác AFBN nội tiếp nên $\widehat{NAB} = \widehat{NFB}$ Tương tự $\widehat{MAC} = \widehat{MEC}$, theo giả thiết $\widehat{NAB} = \widehat{MAC}$, suy ra: $\widehat{NFB} = \widehat{MEC}$ Do đó tứ giác BCEF nội tiếp. Suy ra $\widehat{CFE} = \widehat{CBE} = \widehat{NBA} \Rightarrow \widehat{NFA} = \widehat{NFE}$. Suy ra A, E, F thẳng hàng.	0,5
	Đường thẳng BM đi qua B và M nên có phương trình: $x - y + 2 = 0$. $E = AF \cap BM$, suy ra tọa độ của E là nghiệm của hpt: $\begin{cases} x + y - 8 = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow E(3; 5)$	0,5
	Đường tròn (T) ngoại tiếp tam giác AMC có phương trình dạng: $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \quad (a^2 + b^2 - c > 0)$ Vì M, Q, E thuộc (T) nên ta có hpt: $\begin{cases} 6a + 2b + c = -10 \\ -2\sqrt{2}b + c = -22 \\ 6a + 10b - c = 34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \\ c = -22 \end{cases} \quad (tm)$ Suy ra (T) có pt: $x^2 + y^2 - 4x - 22 = 0$.	0,5

	A là giao điểm của AE và (T) nên tọa độ điểm A là nghiệm của hpt: $\begin{cases} x+y-8=0 \\ x^2+y^2-4x-22=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7 \\ y=1 \\ x=3 \\ y=5 \end{cases} \Rightarrow A(7;1)$ Vậy $A(7;1)$	0,5
6. (2,0đ)	Có $ab+bc+ca=1$ nên $b^2+c^2+2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)-a^2=(a+b+c)^2-a^2=S^2-a^2$ trong đó $S=a+b+c$ và $S^2=(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca) \geq 3 \Rightarrow S \geq \sqrt{3}$. Khi đó $\frac{a}{b^2+c^2+2} + \frac{b}{c^2+a^2+2} + \frac{c}{a^2+b^2+2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{8}$	0,5
	$\Leftrightarrow \frac{a}{S^2-a^2} + \frac{b}{S^2-b^2} + \frac{c}{S^2-c^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{8} \Leftrightarrow \frac{aS^2}{S^2-a^2} + \frac{bS^2}{S^2-b^2} + \frac{cS^2}{S^2-c^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{8} S^2$ $\Leftrightarrow \frac{a^3}{S^2-a^2} + a + \frac{b^3}{S^2-b^2} + b + \frac{c^3}{S^2-c^2} + c \geq \frac{3\sqrt{3}}{8} S^2$ $\Leftrightarrow \frac{a^3}{S^2-a^2} + \frac{b^3}{S^2-b^2} + \frac{c^3}{S^2-c^2} + S \geq \frac{3\sqrt{3}}{8} S^2$	0,5
	$\Leftrightarrow \frac{a^4}{aS^2-a^3} + \frac{b^4}{bS^2-b^3} + \frac{c^4}{cS^2-c^3} + S \geq \frac{3\sqrt{3}}{8} S^2$ Lại có theo Cauchy-Schwarz thì $\frac{a^4}{aS^2-a^3} + \frac{b^4}{bS^2-b^3} + \frac{c^4}{cS^2-c^3} \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{S^2(a+b+c)-(a^3+b^3+c^3)}$ $= \frac{S(a^2+b^2+c^2)^2}{S^4-(a+b+c)(a^3+b^3+c^3)} \geq \frac{S(S^2-2)^2}{S^4-(S^2-2)^2} = \frac{S(S^2-2)^2}{4S^2-4}$ (Vì $(a^2+b^2+c^2)^2 = (\sqrt{a}\sqrt{a^3} + \sqrt{b}\sqrt{b^3} + \sqrt{c}\sqrt{c^3})^2 \leq (a+b+c)(a^3+b^3+c^3)$)	0,5
	Ta đi chứng minh $\frac{S(S^2-2)^2}{4(S^2-1)} + S \geq \frac{3\sqrt{3}}{8} S^2 \Leftrightarrow \frac{(S^2-2)^2}{4(S^2-1)} + 1 \geq \frac{3\sqrt{3}}{8} S$ $\Leftrightarrow 2S^3 - 3\sqrt{3}S^2 + 3\sqrt{3} \geq 0 \Leftrightarrow (S-\sqrt{3})(2S^2 - \sqrt{3}S - 3) \geq 0$ $\Leftrightarrow (S-\sqrt{3})^2(2S+\sqrt{3}) \geq 0 \quad (\text{luôn đúng } \forall S \geq \sqrt{3})$ Vậy BĐT (*) được chứng minh, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$.	0,5
	Hết..... <u>Ghi chú:</u> HS giải cách khác đúng vẫn cho điểm tối đa.	

