

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn thi: Toán - Lớp 8

Thời gian làm bài: 90 phút, không kể thời gian giao đề

Ngày thi: 23 tháng 3 năm 2017

(Đề thi gồm có 01 trang)

Câu 1: (6,5 điểm) Giải các phương trình sau:

a) $\left(\frac{x-1}{99} + x - 99\right) + \left(\frac{x-3}{97} + \frac{x-7}{93}\right) + \left(\frac{x-5}{95} + \frac{x-95}{5}\right) = 6.$

b) $(4x-5)^2(2x-3)(x-1) = 9.$

c) $\frac{5}{x-8} + 1 = \frac{23}{x^2-5x-24} - \frac{2}{x+3}.$

Câu 2: (5,0 điểm)

a) Giả sử $x \neq \pm y$ thỏa mãn điều kiện: $\frac{y}{x+y} + \frac{2y^2}{x^2+y^2} + \frac{4y^4}{x^4+y^4} + \frac{8y^8}{x^8-y^8} = 4.$

Chứng minh rằng: $5y = 4x.$

b) Cho hai số dương a, b thỏa mãn $a - b = a^3 + b^3$. Chứng minh rằng: $a^2 + b^2 < 1.$

c) Cho $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn $a^3 + b^3 = 2(c^3 - 8d^3)$. Chứng minh rằng: $a + b + c + d$ chia hết cho 3.

Câu 3: (1,0 điểm)

Khối lớp 8 của một trường THCS có bốn lớp $8_1, 8_2, 8_3$ và 8_4 . Trung bình cộng số học sinh của bốn lớp là 39,5. Nếu chuyển 4 em từ lớp 8_1 sang lớp 8_2 thì số học sinh của hai lớp bằng nhau. Số học sinh 8_3 bằng trung bình cộng số học sinh hai lớp 8_1 và 8_2 . Số học sinh 8_4 bằng trung bình cộng số học sinh hai lớp 8_2 và 8_3 . Tìm số học sinh ban đầu của mỗi lớp.

Câu 4: (4,0 điểm)

Cho tam giác đều ABC, điểm M nằm trong tam giác ABC. Vẽ MD vuông góc với BC tại D, ME vuông góc với AC tại E, MF vuông góc với AB tại F.

Đặt $MD = x, ME = y, MF = z$

a) Chứng minh rằng $x + y + z$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm M.

b) Xác định vị trí của điểm M để $x^2 + y^2 + z^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 5: (3,5 điểm) Cho tam giác nhọn ABC, BD và CE là hai đường cao cắt nhau tại H.

a) Chứng minh rằng: $\Delta HED \sim \Delta HBC$

b) Gọi M là trung điểm của cạnh BC, N là điểm trên tia đối của tia HA. Đường thẳng qua N vuông góc với MH cắt AB, AC lần lượt tại I, K. Chứng minh rằng: N là trung điểm của IK.

HẾT

GIẢI TÓM TẮT

Câu 1: a) $\left(\frac{x-1}{99} + x - 99\right) + \left(\frac{x-3}{97} + \frac{x-7}{93}\right) + \left(\frac{x-5}{95} + \frac{x-95}{5}\right) = 6$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{99} - 1 + x - 99 - 1 + \frac{x-3}{97} - 1 + \frac{x-7}{93} - 1 + \frac{x-5}{95} - 1 + \frac{x-95}{5} - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-100) \underbrace{\left(\frac{1}{99} + 1 + \frac{1}{97} + \frac{1}{93} + \frac{1}{95} + \frac{1}{5}\right)}_{>0} = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 100 = 0 \Leftrightarrow x = 100 \quad \text{b)}$$

$$(4x-5)^2(2x-3)(x-1) = 9 \Leftrightarrow (16x^2 - 40x + 25)(2x^2 - 5x + 3) = 9 \Leftrightarrow (16x^2 - 40x + 25)(16x^2 - 40x + 24) = 72(1)$$

Đặt $16x^2 - 40x + 25 = (4x-5)^2 = t \geq 0$ thì (1) trở thành: $t(t-1) = 72 \Leftrightarrow t^2 - t - 72 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=9 \\ t=-8 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow t=9$

$$\bullet 16x^2 - 40x + 25 = 9 \Leftrightarrow 16x^2 - 40x + 16 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=\frac{1}{2} \end{cases}$$

c) $\frac{5}{x-8} + 1 = \frac{23}{x^2 - 5x - 24} - \frac{2}{x+3}$

Câu 2: a) Với $x \neq \pm y$, ta có $\frac{y}{x+y} + \frac{2y^2}{x^2+y^2} + \frac{4y^4}{x^4+y^4} + \frac{8y^8}{x^8-y^8} = 4 \Leftrightarrow \frac{y}{x+y} + \frac{2y^2}{x^2+y^2} + \frac{4y^4(x^4-y^4)+8y^8}{(x^4-y^4)(x^4+y^4)} = 4$

$$\Leftrightarrow \frac{y}{x+y} + \frac{2y^2}{x^2+y^2} + \frac{4y^4(x^4+y^4)}{(x^4-y^4)(x^4+y^4)} = 4 \Leftrightarrow \frac{y}{x+y} + \frac{2y^2}{x^2+y^2} + \frac{4y^4}{x^4-y^4} = 4 \Leftrightarrow \frac{y}{x+y} + \frac{2y^2(x^2-y^2)+4y^4}{(x^2-y^2)(x^2+y^2)} = 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{y}{x+y} + \frac{2y^2(x^2+y^2)}{(x^2-y^2)(x^2+y^2)} = 4 \Leftrightarrow \frac{y}{x+y} + \frac{2y^2}{x^2-y^2} = 4 \Leftrightarrow \frac{y(x-y)+2y^2}{(x-y)(x+y)} = 4 \Leftrightarrow \frac{y(x+y)}{(x-y)(x+y)} = 4 \Leftrightarrow \frac{y}{x-y} = 4$$

$$\Leftrightarrow y = 4x - 4y \Leftrightarrow 5y = 4x$$

b) Với $a, b > 0$ và $a - b = a^3 + b^3$, ta có $a - b = a^3 + b^3 > a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + b^2 + ab)$

$$\Leftrightarrow (a-b)(a^2 + b^2 + ab - 1) < 0 \text{ mà } a - b = a^3 + b^3 > 0 \text{ nên } a^2 + b^2 + ab - 1 < 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 < 1 - ab < 1$$

Hoặc giả sử $a^2 + b^2 \geq 1$ mà $a - b = a^3 - b^3 \Rightarrow (a-b)(a^2 + b^2) \geq a^3 - b^3 \Rightarrow ab^2 - a^2b \geq 0 \Rightarrow ab(b-a) \geq 0$

$$\Rightarrow ab(a-b) \leq 0 \text{ mà } ab > 0 \Rightarrow a - b \leq 0 \text{ (trái giả thiết } a - b = a^3 + b^3 > 0)$$

c) Với $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ ta có $a^3 + b^3 = 2(c^3 - 8d^3) \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 3c^3 - 15d^3$ chia hết cho 3

$$\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \equiv 0 \pmod{3}$$

$a \equiv \dots \pmod{3}$	0	1	-1
$a^3 \equiv \dots \pmod{3}$	0	1	-1

Suy ra $a \equiv a^3 \pmod{3}$. Tương tự $b \equiv b^3 \pmod{3}$; $c \equiv c^3 \pmod{3}$; $d \equiv d^3 \pmod{3}$ nên $a + b + c + d \equiv a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \equiv 0 \pmod{3}$ hay $a + b + c + d$ chia hết cho 3.

Câu 3: Gọi số học sinh ban đầu của lớp 8₁, 8₂, 8₃, 8₄ lần lượt là $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{N}^*$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 39,5.4 = 158 \text{ (học sinh)(1)}$$

• Ta có $x_1 - 4 = x_2 + 4 \Rightarrow x_1 = x_2 + 8$ • $x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2} \Rightarrow x_3 = \frac{x_2 + 8 + x_2}{2} = x_2 + 4$ và

$$x_4 = \frac{x_2 + x_3}{2} \Rightarrow x_4 = \frac{x_2 + x_2 + 4}{2} = x_2 + 2. \text{ Thế vào (1), tính được } x_2 = 36; x_1 = 44; x_3 = 40; x_4 = 38$$

Câu 4: a) Gọi cạnh tam giác đều ABC là a và chiều cao là h. Ta có :

$$S_{BMC} + S_{CMA} + S_{AMB} = S_{ABC} \Leftrightarrow \frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}ay + \frac{1}{2}az = \frac{1}{2}ah \Leftrightarrow \frac{1}{2}a(x+y+z) = \frac{1}{2}ah \Leftrightarrow x+y+z = h$$

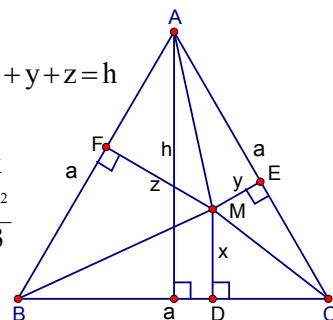
không phụ thuộc vào vị trí của điểm M.

b) • $x^2 + y^2 \geq 2xy$; $y^2 + z^2 \geq 2yz$; $z^2 + x^2 \geq 2zx \Rightarrow 2(x^2 + y^2 + z^2) \geq 2xy + 2yz + 2zx$

$$\Rightarrow 3(x^2 + y^2 + z^2) \geq x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{(x+y+z)^2}{3} = \frac{h^2}{3}$$

không đổi

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z \Leftrightarrow M$ là giao điểm 3 đường phân giác của ΔABC (M là tâm của tam giác đều ABC)



Câu 5: a) • Ta có: $\triangle HEB \sim \triangle HDC$ (g.g) $\Rightarrow \triangle HED \sim \triangle HBC$ (c.g.c)

b) Vẽ đường thẳng qua H vuông góc với MH cắt AB, AC lần lượt tại F, G $\Rightarrow FG \parallel IK$.

• Vẽ $CV \parallel MH$ ($V \in BD$) mà $FG \perp MH \Rightarrow CV \perp FG$, cho HG cắt CV tại T $\Rightarrow HT \perp CV$.

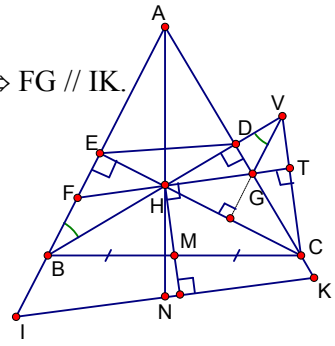
• $\triangle HCV$ có hai đường cao CD và HT cắt nhau tại G $\Rightarrow G$ là trực tâm

$\Rightarrow VG \perp CH$ mà $BF \perp CH \Rightarrow BF \parallel VG \Rightarrow \widehat{FBH} = \widehat{GVH}$ (so le trong).

• $\triangle BVC$ có M là trung điểm của BC và $MH \parallel CV \Rightarrow H$ là trung điểm của BV $\Rightarrow HB = HV$.

• $\triangle FHB = \triangle GHV$ (g.c.g) $\Rightarrow HF = HG$.

• $HF \parallel NI$ và $HG \parallel NK$ nên $\frac{HF}{NI} = \frac{AH}{AN} = \frac{HG}{NK} \Rightarrow NI = NK$ (hệ quả của định lý Ta-let)



Có gì sai sót, kính mong Thầy Cô và các bạn thông cảm.