

ĐỀ CHÍNH THỨC

Bài I: (2,0 điểm) Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x}-x} \right) \cdot \frac{x-2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$ và $B = \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$ với $x > 0, x \neq 1$.

1) Tính giá trị của B khi $x = \frac{1}{4}$ và rút gọn biểu thức A.

2) Cho $P = \frac{A}{B}$. Khi $\sqrt{P}$ xác định, hãy so sánh P và $\sqrt{P}$.

Bài II: (2,5 điểm)

1) Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình:

Một mảnh đất hình chữ nhật có chu vi là 120m. Nếu tăng chiều rộng 5m và giảm chiều dài đi 25% thì chu vi mảnh đất giảm đi 10m. Tính diện tích của mảnh đất hình chữ nhật ban đầu?

2) Hằng năm có một số nơi cứ mỗi độ xuân về, mọi người lại sửa soạn đón chào năm mới cùng với việc chuẩn bị cỗ bàn để cúng gia tiên, tiễn đưa ông táo về trời...thì nhà nào cũng trồng một cây nêu trước cổng nhà. Phong tục này đã được người dân Việt duy trì từ bao đời nay. Giả sử một cây nêu trồng thẳng đứng vuông góc với mặt đất (bỏ qua độ cong của phần ngọn), mặt trời chiếu xuống tạo bóng của cây nêu trên mặt đất cách gốc cây 4,6m, tia nắng mặt trời chiếu xuống hợp với mặt đất một góc 53° . Tính chiều cao của cây nêu? (Kết quả làm tròn đến hàng phần nguyên).



Bài III: (2,0 điểm) 1) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{1}{x+y} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} = 2 \\ \frac{2}{x+y} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} = 1 \end{cases}$$

2) Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng (d): $y = mx - 1$ ($m \neq 0$). Tìm m để đường thẳng (d) tiếp xúc với đường tròn có tâm tại gốc tọa độ O và bán kính $R = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

Bài IV: (3,0 điểm) Cho nửa đường tròn tâm O với bán kính R, đường kính AB. Trên nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB chứa nửa đường tròn, kẻ tiếp tuyến Ax tại A của nửa đường tròn. Xét điểm M thay đổi trên tia Ax, $M \neq A$, kẻ tiếp tuyến MC với nửa đường tròn (O), đường thẳng MO cắt nửa (O) tại D và cắt AC tại E.

1) Chứng minh rằng bốn điểm M, A, O, C cùng thuộc một đường tròn.

2) Chứng minh $MD \cdot EA = MA \cdot ED$.

3) Từ O kẻ đường thẳng song song với AC cắt MC tại K. Xác định vị trí của M để tích $OD \cdot MK$ nhỏ nhất, tìm giá trị nhỏ nhất đó theo R.

Bài V: (0,5 điểm) Tìm $x, y \in \mathbb{N}$ sao cho $x^3 = 1993 \cdot 3^y + 2021$.

----- HẾT -----