SỞ GD&ĐT NGHỆ AN

Đề chính thức

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH LỚP 11 CẤP THPT
NĂM HỌC 2018 – 2019

Môn thi: TOÁN - BẢNG A
Thời gian: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Câu 1 (7,0 *điểm*).

a) Giải phương trình $\cos 2x + 7\cos x - \sqrt{3}\left(\sin 2x - 7\sin x\right) = 8$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + \sqrt{x^2 + 2x + 2} = \sqrt{y^2 + 1} - y - 1 \\ x^3 - \left(3x^2 + 2y^2 - 6\right)\sqrt{2x^2 - y - 2} = 0 \end{cases}$ $\left(x, y \in \mathbb{R}\right)$.

Câu 2 (2,0 *điểm*). Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm 4 chữ số đôi một khác nhau được chọn từ các số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Xác định số phần tử của S. Lấy ngẫu nhiên một số từ S, tính xác suất để số được chọn là số chia hết cho 11 và tổng 4 chữ số của nó cũng chia hết cho 11.

Câu 3 (2,0 *điểm*). Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 2BC$. Gọi M là trung điểm của đoạn AB và G là trọng tâm tam giác ACD. Viết phương trình đường thẳng AD, biết rằng $M\left(1; 2\right)$ và $G\left(\frac{5}{3}; 0\right)$.

Câu 4 (5,0 *điểm*). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân $\left(AB // CD\right)$ nội tiếp đường tròn tâm O và $\widehat{SBA} = \widehat{SCA} = 90^0$. Gọi M là trung điểm của cạnh SA.

a) Chứng minh rằng $MO \perp \left(ABCD\right)$.

b) Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng AB và SC. Chứng minh rằng $\cos\varphi < \frac{BC}{SA}$.

Câu 5 (4,0 *điểm*).

a) Cho dãy số $\left(u_n\right)$, biết $u_1 = 12$, $\frac{2u_{n+1}}{n^2 + 5n + 6} = \frac{u_n + n^2 - n - 2}{n^2 + n}$ với $n \geq 1$.

Tìm $\lim \frac{u_n}{2n^2 + 1}$.

b) Cho ba số thực a, b, c thỏa mãn $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc + 32$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \left(a^2 + b^2 + c^2\right)\left(|a - b| + |b - c| + |c - a|\right).$$

- - - Hết - - -

Họ và tên thí sinh.. Số báo danh...............................

SỞ GD&ĐT NGHỆ AN **KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH LỚP 11 CẤP THPT**

NĂM HỌC 2018 – 2019

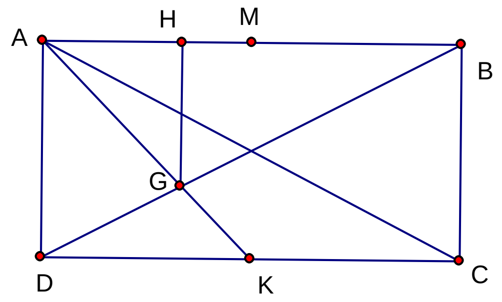
HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ THI CHÍNH THỨC

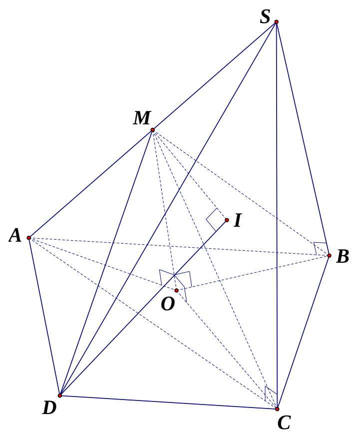
Môn: TOÁN – BẢNG A

*(Hướng dẫn chấm này gồm **06** trang)*

Câu	Đáp án	Điểm
1. (7,0đ)	**a) (4,0 điểm)** Giải phương trình $\cos 2x+7\cos x-\sqrt{3}\left(\sin 2x-7\sin x\right)=8.$ (1)	
	$(1)\Leftrightarrow\left(\cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x\right)+7\left(\cos x+\sqrt{3}\sin x\right)=8$	**0,5**
	$\Leftrightarrow\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+7\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-4=0$	**1,0**
	$\Leftrightarrow 1-2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+7\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-4=0$ $\Leftrightarrow 2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-7\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+3=0$	**1,0**
	$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\\ \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=3\,(ptvn)\end{array}\right.$	**0,5**
	$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\ x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.\left(k\in\mathbb{Z}\right).$	**0,5**
	Vậy phương trình có nghiệm $x=k2\pi,\ x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}.$	**0,5**
	b) (3,0 điểm) Giải hệ phương trình $\begin{cases}x+\sqrt{x^2+2x+2}=\sqrt{y^2+1}-y-1 & (1)\\ x^3-\left(3x^2+2y^2-6\right)\sqrt{2x^2-y-2}=0 & (2)\end{cases}\left(x,y\in\mathbb{R}\right).$	
	Điều kiện $2x^2-y-2\geq 0$. $(1)\Leftrightarrow(x+1+y)+\sqrt{(x+1)^2+1}-\sqrt{y^2+1}=0$	**0,5**
	$\Leftrightarrow(x+1+y)+\frac{(x+1+y)(x+1-y)}{\sqrt{(x+1)^2+1}+\sqrt{y^2+1}}=0$ $\Leftrightarrow(x+1+y)\left(1+\frac{x+1-y}{\sqrt{(x+1)^2+1}+\sqrt{y^2+1}}\right)=0$ $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+1+y=0\\ 1+\frac{x+1-y}{\sqrt{(x+1)^2+1}+\sqrt{y^2+1}}=0\end{array}\right.$	**0,5**

	$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-x-1 \\ \sqrt{(x+1)^2+1}+\sqrt{y^2+1}+(x+1)-y=0 \ (*) \end{array}\right.$ Ta có $\sqrt{(x+1)^2+1}+\sqrt{y^2+1}+(x+1)-y>\|x+1\|+(x+1)+\|y\|-y\geq 0$ nên phương trình (*) vô nghiệm.	**0,5**
	Thay $y=-x-1$ vào phương trình (2) ta được phương trình $x^3-\left(5x^2+4x-4\right)\sqrt{2x^2+x-1}=0$ $\Leftrightarrow x^3+\left[3x^2-4\left(2x^2+x-1\right)\right]\sqrt{2x^2+x-1}=0 \quad (3)$	**0,5**
	Đặt $a=\sqrt{2x^2+x-1}\geq 0$, phương trình (3) trở thành $x^3+3x^2a-4a^3=0 \Leftrightarrow (x-a)(x+2a)^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a \\ x=-2a \end{array}\right.$	**0,5**
	$x=a \Leftrightarrow \sqrt{2x^2+x-1}=x \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ x^2+x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow y=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ $x=-2a \Leftrightarrow 2\sqrt{2x^2+x-1}=-x \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 0 \\ 7x^2+4x-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{-2-4\sqrt{2}}{7} \Rightarrow y=\dfrac{-5+4\sqrt{2}}{7}$ Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y)$ với $\begin{cases} x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ y=-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$ và $\begin{cases} x=\dfrac{-2-4\sqrt{2}}{7} \\ y=\dfrac{-5+4\sqrt{2}}{7} \end{cases}$.	**0,5**
2. (2,0đ)	Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm 4 chữ số đôi một khác nhau được chọn từ các số $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Xác định số phần tử của S. Lấy ngẫu nhiên một số từ S, tính xác suất để số được chọn là số chia hết cho 11 và tổng 4 chữ số của nó cũng chia hết cho 11.	
	Số phần tử của S là $A_9^4=3024$ (số). Số phần tử của không gian mẫu là $n\left(\Omega\right)=3024$ Gọi A là biến cố “số được chọn là số chia hết cho 11 và tổng 4 chữ số của nó cũng chia hết cho 11”.	**0,5**
	Gọi số tự nhiên gồm 4 chữ số đôi một khác nhau là $\overline{abcd}$ $\left(a\neq 0,\ a\neq b\neq c\neq d\right)$ Theo giả thiết ta có $\left(a+c\right)-\left(b+d\right)\,\vdots\,11$ và $\left(a+c\right)+\left(b+d\right)\,\vdots\,11$ Suy ra $\left(a+c\right)\vdots\,11$ và $\left(b+d\right)\vdots\,11$.	**0,5**
	Trong các chữ số $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ có các bộ số gồm hai chữ số mà tổng chia hết cho 11 là $\{2,9\};\{3,8\};\{4,7\};\{5,6\}$.	**0,5**
	Chọn cặp số $\{a,c\}$ có 4 khả năng, mỗi khả năng có 2 cách. Khi đó chọn cặp số $\{b,d\}$ còn 3 khả năng, mỗi khả năng có 2 cách. Như vậy $n\left(A\right)=4.2.3.2=48$ (số).	**0,5**

	Xác suất cần tìm là $p(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{48}{3024}=\frac{1}{63}$.	
3. **(2,0đ)**	Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=2BC$. Gọi M là trung điểm của đoạn AB và G là trọng tâm tam giác ACD. Viết phương trình đường thẳng AD, biết rằng $M(1;2)$ và $G\left(\frac{5}{3};0\right)$.	
		
	Gọi H là hình chiếu vuông góc của G lên AB và K là trung điểm đoạn CD. Đặt $BC=3a>0$, suy ra $AB=6a, GH=2a, HM=a$. $MG^2=4a^2+a^2 \Leftrightarrow \frac{40}{9}=5a^2 \Leftrightarrow a^2=\frac{8}{9} \Leftrightarrow a=\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Suy ra $AM=3a=2\sqrt{2}$, $AG=\frac{2}{3}AK=\frac{2}{3}\left(3a\sqrt{2}\right)=\frac{8}{3}$.	**0,5**
	Gọi $A(x,y)$. Khi đó $\begin{cases} AM=2\sqrt{2} \\ AG=\frac{8}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-x)^2+(2-y)^2=8 \\ \left(\frac{5}{3}-x\right)^2+y^2=\frac{64}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-2x-4y=3 \\ x=3y-1 \end{cases}$	**0,5**
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3y-1 \\ \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=\frac{8}{5} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1, y=0 \\ x=\frac{19}{5}, y=\frac{8}{5} \end{array}\right.$	**0,5**
	+) Nếu $A(-1,0)$. Đường thẳng AD đi qua A và vuông góc với đường thẳng AM nên phương trình đường thẳng AD là $x+y+1=0$. +) Nếu $A(\frac{19}{5},\frac{8}{5})$. Đường thẳng AD đi qua A và vuông góc với đường thẳng AM nên phương trình đường thẳng AD là $7x-y-25=0$.	**0,5**
4. **(5,0đ)**	Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân $(AB//CD)$ nội tiếp đường tròn tâm O và $SBA=SCA=90^0$. Gọi M là trung điểm của cạnh SA. **a)** Chứng minh rằng $MO\perp(ABCD)$. **b)** Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng AB và SC. Chứng minh rằng	

	$\cos\varphi<\dfrac{BC}{SA}$.	
	a) (3,0 điểm)	
		
	Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng $(ABCD)$ Xét các tam giác $\Delta MHA, \Delta MHB, \Delta MHC$ có $MHA=MHB=MHC=90^0$	**1,0**
	MH chung $MA=MB=MC=\dfrac{1}{2}SA$ Suy ra $\Delta MHA=\Delta MHB=\Delta MHC$ nên $HA=HB=HC$	**1,0**
	Do đó $H\equiv O,$ vì vậy $MO\perp(ABCD)$.	**1,0**
	b) (2,0 điểm)	
	Vì $AB//CD$ nên góc giữa hai đường thẳng AB và SC là góc giữa hai đường thẳng CD và $SC,$ suy ra $\cos\varphi=\left\|\cos SCD\right\|=\sqrt{1-\sin^2 SCD}$ (*)	**0,5**
	Gọi điểm I là hình chiếu vuông góc của điểm M lên mặt phẳng (SCD) Ta có $MD=MC=\dfrac{1}{2}SA$ nên ΔSDA vuông tại D	**0,5**
	Mặt khác lại có $MS=MD=MC$ suy ra I là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta SCD.$ Khi đó $\sin SCD=\dfrac{SD}{2ID}>\dfrac{SD}{2MD}=\dfrac{SD}{SA}$ (vì ΔMID vuông tại I nên $ID<MD$)	**0,5**
	Từ (*) suy ra $\cos\varphi=\sqrt{1-\sin^2 SCD}<\sqrt{1-\dfrac{SD^2}{SA^2}}=\sqrt{\dfrac{SA^2-SD^2}{SA^2}}=\sqrt{\dfrac{AD^2}{SA^2}}=\dfrac{AD}{SA}=\dfrac{BC}{SA}$ $\cos\varphi<\dfrac{BC}{SA}$ (đpcm)	**0,5**
5. (4,0đ)	**a) (2,0 điểm)** Cho dãy số (u_n), biết $u_1=12,$ $\dfrac{2u_{n+1}}{n^2+5n+6}=\dfrac{u_n+n^2-n-2}{n^2+n}$ với $n\geq 1.$ Tìm $\lim\dfrac{u_n}{2n^2+1}$.	

	Ta có: $\frac{2u_{n+1}}{n^2+5n+6}=\frac{u_n+n^2-n-2}{n^2+n}\Leftrightarrow\frac{2u_{n+1}}{(n+2)(n+3)}=\frac{u_n}{n(n+1)}+\frac{n-2}{n}$ $\Leftrightarrow\frac{2u_{n+1}}{(n+1)(n+2)^2(n+3)}=\frac{u_n}{n(n+1)^2(n+2)}+\frac{n-2}{n(n+1)(n+2)}$	**0,5**
	$\Leftrightarrow\frac{2u_{n+1}}{(n+1)(n+2)^2(n+3)}=\frac{u_n}{n(n+1)^2(n+2)}+\frac{2}{(n+1)(n+2)}-\frac{1}{n(n+1)}$ $\Leftrightarrow\frac{u_{n+1}}{(n+1)(n+2)^2(n+3)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{u_n}{n(n+1)^2(n+2)}-\frac{1}{n(n+1)}\right]$ (*)	**0,5**
	Đặt $v_n=\frac{u_n}{n(n+1)^2(n+2)}-\frac{1}{n(n+1)}$, từ (*) ta có $v_{n+1}=\frac{1}{2}v_n$ nên (v_n) là cấp số nhân có công bội $q=\frac{1}{2}, v_1=\frac{1}{2}$ suy ra $v_n=v_1q^{n-1}=\frac{1}{2^n}$ $\frac{u_n}{n(n+1)^2(n+2)}-\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{2^n}\Leftrightarrow u_n=\frac{n(n+1)^2(n+2)}{2^n}+(n^2+3n+2)$	**0,5**
	Khi đó $\lim\frac{u_n}{2n^2+1}=\lim\frac{\frac{n(n+1)^2(n+2)}{2^n}+(n^2+3n+2)}{2n^2+1}=\lim\left[\frac{n(n+1)^2(n+2)}{2^n(2n^2+1)}+\frac{n^2+3n+2}{2n^2+1}\right]$ Ta có $2^n=C_n^0+C_n^1+C_n^2+C_n^3+...+C_n^n>C_n^3=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ Suy ra $\lim\frac{n(n+1)^2(n+2)}{2^n(2n^2+1)}=0$ và $\lim\frac{n^2+3n+2}{2n^2+1}=\frac{1}{2}$ Vậy $\lim\frac{u_n}{2n^2+1}=\frac{1}{2}$	**0,5**
	b) (2,0 điểm) Cho ba số thực a, b, c thỏa mãn $a^3+b^3+c^3=3abc+32$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=(a^2+b^2+c^2)(\lvert a-b\rvert+\lvert b-c\rvert+\lvert c-a\rvert)$.	
	Ta có $a^3+b^3+c^3-3abc=32\Leftrightarrow(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=32$ (*) Đặt $t=a+b+c$, từ (*) suy ra $t=a+b+c>0$	**0,5**
	$(*)\Leftrightarrow(a+b+c)\left[3(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)^2\right]=64$ $\Leftrightarrow3(a^2+b^2+c^2)=\frac{64}{a+b+c}+(a+b+c)^2=\frac{64}{t}+t^2$	**0,5**
	Ta chứng minh $\lvert a-b\rvert+\lvert b-c\rvert+\lvert c-a\rvert\ge\sqrt{2\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2\right]}$ (**)	**0,5**

	Thật vậy,vì vai trò a,b,c bình đẳng nên giả sử $a \geq b \geq c$ $\|a-b\|+\|b-c\|+\|c-a\|=(a-b)+(b-c)+(a-c)=2(a-c)$ Ta có $(**) \Leftrightarrow 2(a-c) \geq \sqrt{2\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2\right]}$ $\Leftrightarrow (a-c)^2 \geq (a-b)^2+(b-c)^2$ $\Leftrightarrow (a-b+b-c)^2 \geq (a-b)^2+(b-c)^2$ $\Leftrightarrow 2(a-b)(b-c) \geq 0$ luôn đúng Vì vậy $\|a-b\|+\|b-c\|+\|c-a\| \geq 2\sqrt{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}=2\sqrt{\frac{32}{a+b+c}}=\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{t}}$ $3P=3\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\|a-b\|+\|b-c\|+\|c-a\|\right)$.	
	$3P \geq \left(\frac{64}{t}+t^2\right)\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{t}}=8\sqrt{2}\left(\frac{64}{t\sqrt{t}}+t\sqrt{t}\right) \geq 8\sqrt{2}.2\sqrt{\frac{64}{t\sqrt{t}}.t\sqrt{t}}=128\sqrt{2}$ Suy ra $P \geq \frac{128\sqrt{2}}{3}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là $\frac{128\sqrt{2}}{3}$ Đạt được khi $a=\frac{4+4\sqrt{2}}{3}, b=c=\frac{4-2\sqrt{2}}{3}$ và các hoán vị của a,b,c	**0,5**

- - - Hết - - -

***<u>Ghi chú</u>*:** *Học sinh làm cách khác nếu đúng vẫn cho điểm tối đa*