

Câu 1. (5,0 điểm)

1. Cho biểu thức $A = \left(1 - \frac{x-3\sqrt{x}}{x-9}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}-2}{3+\sqrt{x}} - \frac{9-x}{x+\sqrt{x}-6}\right)$

a) Tìm x để biểu thức A có nghĩa và rút gọn biểu thức A .

b) Tính giá trị của A khi $x = 22 + 12\sqrt{2}$

2. Cho $x; y$ thỏa mãn $0 < x < 1; 0 < y < 1$ và $\frac{x}{1-x} + \frac{y}{1-y} = 1$.

Tính giá trị của biểu thức $P = x + y + \sqrt{x^2 - xy + y^2}$.

3. Cho ba số dương a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{b+a} \geq \frac{3}{2}$$

Câu 2. (5,0 điểm)

1. Giải phương trình: $3x^3 - 17x^2 - 8x + 9 + \sqrt{3x-2} - \sqrt{7-x} = 0$

2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{2x^2}{(y+1)^2} + \frac{2y^2}{(x+1)^2} = 1 \\ 3xy - x - y = 1 \end{cases}$$

Câu 3: (5,0 điểm) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O) và trực tâm là H . Lấy điểm M thuộc cung nhỏ BC .

a) Xác định vị trí của điểm M sao cho tứ giác $BHCM$ là hình bình hành.

b) Với M lấy bất kì thuộc cung nhỏ BC ; gọi N, E lần lượt là các điểm đối xứng của M qua AB và AC . Chứng minh tứ giác $AHBN$ nội tiếp.

c) Chứng minh ba điểm N, H, E thẳng hàng.

d) Xác định vị trí của điểm M thuộc cung nhỏ BC để cho NE có độ dài lớn nhất.

Câu 4. (2,0 điểm) Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) . Một điểm M di động trên cung nhỏ BC . Từ M kẻ MH, MK lần lượt vuông góc AB, AC ($H \in AB, K \in AC$).

1. Chứng minh $\triangle MBC$ đồng dạng $\triangle MHK$

2. Tìm vị trí của M để HK lớn nhất.

Câu 5. (3,0 điểm)

1. Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình $x^2 + 2022x + 2023y^2 + y = xy + 2023xy^2 + 2024$.

2. Tìm các số nguyên dương sao cho $n^2 + 2n + \sqrt{n^2 + 2n + 18} + 9$ là số chính phương.

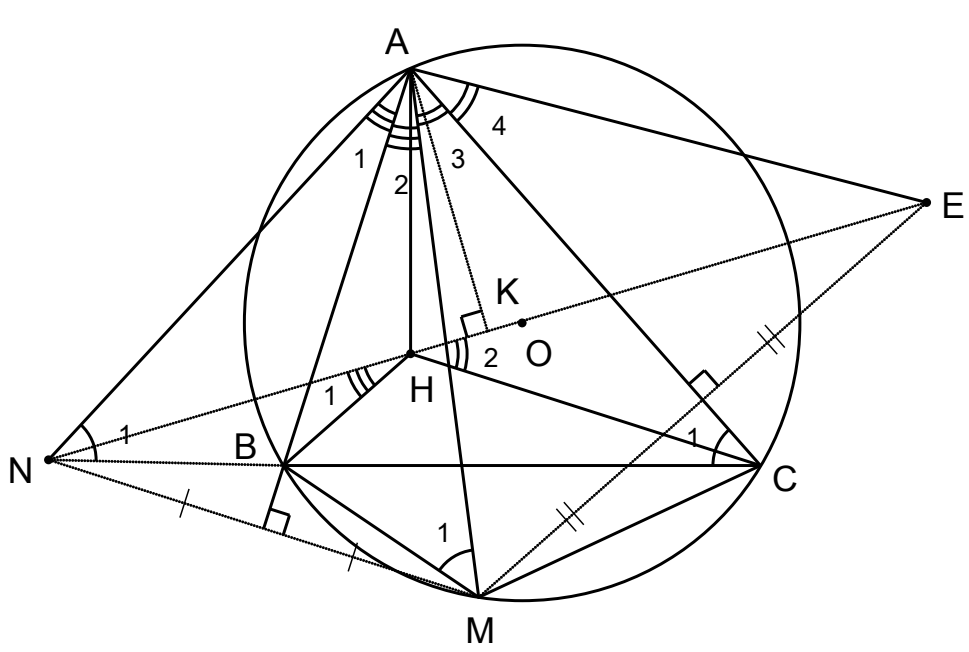
--- HẾT ---

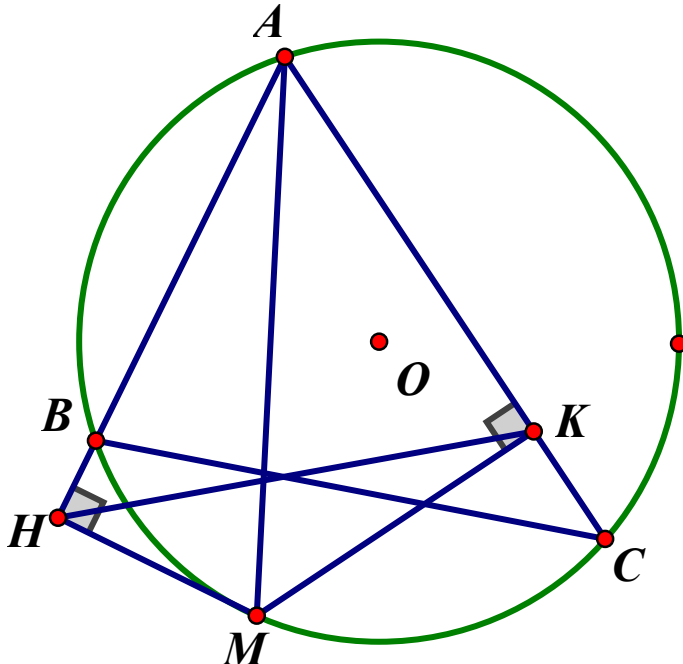
- Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.
- Giám thị coi thi không giải thích gì thêm.

ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM

Câu	Ý	LỜI GIẢI	Điểm
1		Cho biểu thức $A = \left(1 - \frac{x-3\sqrt{x}}{x-9}\right) : \left(\frac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}-2}{3+\sqrt{x}} - \frac{9-x}{x+\sqrt{x}-6}\right)$	
		a) Tìm x để biểu thức A có nghĩa và rút gọn biểu thức A .	
	1	+) ĐK: $\begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x}-2 \neq 0 \\ x-9 \neq 0 \\ \frac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}-2}{3+\sqrt{x}} - \frac{9-x}{x+\sqrt{x}-6} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 4 \\ x \neq 9 \end{cases} (*)$	0,5
		+) $A = \left(1 - \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}\right) : \frac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3) + (\sqrt{x}+2)(2-\sqrt{x}) + 9-x}{(2-\sqrt{x})(\sqrt{x}+3)}$ $= \frac{3}{\sqrt{x}+3} : \frac{\sqrt{x}-2}{3+\sqrt{x}} = \frac{3}{\sqrt{x}-2}$	1,5
		b) Tính giá trị của A khi $x = 22 + 12\sqrt{2}$	
		$A = \frac{3}{\sqrt{22+12\sqrt{2}}-2} = \frac{3}{\sqrt{(2+3\sqrt{2})^2}-2} = \frac{3}{2+3\sqrt{2}-2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	0,5
2			0,5
		Cho $x; y$ thỏa mãn $0 < x < 1; 0 < y < 1$ và $\frac{x}{1-x} + \frac{y}{1-y} = 1$. Tính giá trị của biểu thức $P = x + y + \sqrt{x^2 - xy + y^2}$.	
		Ta có $P = x + y + \sqrt{x^2 - xy + y^2} = x + y + \sqrt{(x+y)^2 - 3xy}$. Thay $\frac{x}{1-x} + \frac{y}{1-y} = 1 \Rightarrow 2x + 2y - 1 = 3xy$ vào biểu thức P ta được	0,25
		$P = x + y + \sqrt{(x+y)^2 - 2(x+y) + 1} = x + y + \sqrt{(x+y-1)^2} = x + y + x+y-1 = 1$ (vì $x+y \leq 1$). Giải thích $x+y \leq 1$. Từ giả thiết ta có $\frac{x}{1-x}; \frac{y}{1-y}$ là các số dương mà $\frac{x}{1-x} + \frac{y}{1-y} = 1$, nên ta	0,5
			0,25

		có $\begin{cases} \frac{x}{1-x} \leq 1 \\ \frac{y}{1-y} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x-1}{1-x} \leq 0 \\ \frac{2y-1}{1-y} \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{2} \\ y \leq \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow x+y \leq 1.$ Vậy $P=1.$	
3		Cho ba số dương a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng:	
		$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{b+a} \geq \frac{3}{2}$	
		Bất đẳng thức trên luôn đúng vì Ta có bất phụ sau với x,y,z > 0 ta chứng minh được. $(x+y+z)(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}) \geq 9$ $\Leftrightarrow (\frac{x}{y} + \frac{y}{x}) + (\frac{x}{z} + \frac{z}{x}) + (\frac{y}{z} + \frac{z}{y}) \geq 6$ luôn / đúng / vì $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2; \frac{x}{z} + \frac{z}{x} \geq 2; \frac{y}{z} + \frac{z}{y} \geq 2$ Dấu = xảy ra khi x = y = z (*)	0,25
		$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{b+a} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{a}{b+c} + 1 + \frac{b}{c+a} + 1 + \frac{c}{b+a} + 1 \geq \frac{3}{2} + 3$	0,25
		$\Leftrightarrow \frac{1}{2}[(b+c) + (c+a) + (b+a)][\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{b+a}] \geq \frac{9}{2}$	0,25
		$\Leftrightarrow [(b+c) + (c+a) + (b+a)][\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{b+a}] \geq 9$	0,25
		Bất đẳng thức luôn đúng vì theo BĐT (*) Dấu = xảy ra khi a = b = c.	
2	1	Giải phương trình $3x^3 - 17x^2 - 8x + 9 + \sqrt{3x-2} - \sqrt{7-x} = 0$	
		ĐKXD: $\frac{2}{3} \leq x \leq 7.$	0,5
		PT (1) $\Leftrightarrow (\sqrt{3x-2} - 4) - (\sqrt{7-x} - 1) + 3x^3 - 17x^2 - 8x + 12 = 0$	
		$\Leftrightarrow (\sqrt{3x-2} - 4) - (\sqrt{7-x} - 1) + (3x-2)(x-6)(x+1) = 0$	0,5
		$\Leftrightarrow \frac{3x-18}{\sqrt{3x-2}+4} - \frac{6-x}{\sqrt{7-x}+1} + (3x-2)(x-6)(x+1) = 0$	
		$\Leftrightarrow (x-6) \left(\frac{3}{\sqrt{3x-2}+4} + \frac{1}{\sqrt{7-x}+1} + (3x-2)(x+1) \right) = 0$	0,5
		Vì $\frac{2}{3} \leq x \leq 7$ nên $\frac{3}{\sqrt{3x-2}+4} + \frac{1}{\sqrt{7-x}+1} + (3x-2)(x+1) > 0$	0,5
		Suy ra $x-6=0 \Leftrightarrow x=6(t/m)$	0,25
		KL: PT (1) có nghiệm duy nhất $x=6.$	0,25
2		Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \frac{2x^2}{(y+1)^2} + \frac{2y^2}{(x+1)^2} = 1 \\ 3xy - x - y = 1 \end{cases}$	
		$x \neq -1, y \neq -1$	0.25
		(2) $\Leftrightarrow 4xy = xy + x + y + 1 \Leftrightarrow 4xy = (x+1)(y+1) \Leftrightarrow \frac{x}{y+1} \cdot \frac{y}{x+1} = \frac{1}{4}$	0,5

	Đặt $\frac{x}{y+1} = a; \frac{y}{x+1} = b$ Ta có $\begin{cases} a^2 + b^2 = \frac{1}{2} \\ a + b = \frac{1}{4} \end{cases}$ Giải hệ ta có $\begin{cases} a = b = \frac{1}{2} \\ b = a = -\frac{1}{2} \end{cases}$	0,5
	Với $a=b=1/2$ ta tìm được $(x,y) = (1;1)$;	0,5
	Với $a=b=-1/2$ ta tìm được $(x,y) = (-1/3;-1/3)$	0,5
	KL: Hệ phương trình có 2 nghiệm (1;1); (-1/3;-1/3)	0,25
3	Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O) và trực tâm là H. Lấy điểm M thuộc cung nhỏ BC. a) Xác định vị trí của điểm M sao cho tứ giác BHCM là hình bình hành. b) Với M lấy bất kì thuộc cung nhỏ BC; gọi N, E lần lượt là các điểm đối xứng của M qua AB và AC. Chứng minh tứ giác AHBN nội tiếp. c) Chứng minh ba điểm N, H, E thẳng hàng. d) Xác định vị trí của điểm M thuộc cung nhỏ BC để cho NE có độ dài lớn nhất.	
		
1	a) Xác định vị trí của điểm M sao cho tứ giác BHCM là hình bình hành. Ta có: $BH \perp AC$; $CH \perp AB$ (vì H là trực tâm tam giác ABC) Tứ giác BHCM là hình bình hành $\Leftrightarrow BH \parallel MC$ và $CH \parallel MB$ $\Leftrightarrow AC \perp MC$ và $AB \perp MB$ $\Leftrightarrow AM$ là đường kính của (O) $\Leftrightarrow M$ là điểm đối xứng của A qua O.	0,5 0,5 0,5 0,5
2	b) Chứng minh tứ giác AHBN nội tiếp.	
	Ta có: $\widehat{M_1} = \widehat{N_1}$ (T/c đối xứng trục)	0,25

	$\widehat{M_1} = \widehat{C_1}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AB) $\Rightarrow \widehat{N_1} = \widehat{C_1}$, mà $\widehat{AHB} + \widehat{C_1} = 180^0$ Do đó: $\widehat{AHB} + \widehat{N_1} = 180^0 \Rightarrow$ Tứ giác NAHB nội tiếp.	0,25 0,25 0,25	
3	c) Chứng minh ba điểm N, H, E thẳng hàng. Tứ giác NAHB nội tiếp $\Rightarrow \widehat{H_1} = \widehat{A_1}$, mà $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ (T/c đối xứng trục) $\Rightarrow \widehat{H_1} = \widehat{A_2}$. Chứng minh tương tự, ta cũng có: $\widehat{H_2} = \widehat{A_3}$ Ta có: $\widehat{BAC} + \widehat{BHC} = 180^0$ Do đó: $\widehat{NHE} = \widehat{H_1} + \widehat{H_2} + \widehat{CHB} = \widehat{A_2} + \widehat{A_3} + \widehat{CHB} = \widehat{BAC} + \widehat{BHC} = 180^0 \Leftrightarrow$ N, H, E thẳng hàng	0,25 0,25 0,25 0,25	
4	d) Xác định vị trí của điểm M thuộc cung nhỏ BC để cho NE có độ dài lớn nhất. Ta có: $\widehat{NAE} = 2\widehat{BAC}$. Kẻ $AK \perp NE$ tại K Ta có: $AM = AN$; $AM = AE$ (Tính chất đối xứng trục) $\Rightarrow AE = AN \Rightarrow \Delta ANE$ cân. Mà: AK là đường cao $\Rightarrow$ AK là trung tuyến, là phân giác $\Rightarrow \widehat{NAE} = 2\widehat{NAK}$; $NE = 2NK \Rightarrow NK = \frac{NE}{2}$ Do đó: $\widehat{BAC} = \widehat{NAK}$ Tam giác KAN vuông tại K $\Rightarrow NK = AN.\sin \widehat{NAK}$ Do đó: $NE = 2AN. \sin \widehat{NAK} = 2AM.\sin \widehat{BAC} \leq 2R.\sin \widehat{BAC}$ (vì $AM \leq 2R$; $\sin \widehat{BAC}$: Không đổi) Do đó: NE lớn nhất $\Leftrightarrow$ AM lớn nhất $\Leftrightarrow$ AM là đường kính của đường tròn (O) $\Leftrightarrow$ M đối xứng với A qua O Vậy khi M là điểm đối xứng của A qua O thì NE lớn nhất.	0,25 0,25 0,25 0,25 0,25	
4	Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). Một điểm M di động trên cung nhỏ BC. Từ M kẻ MH, MK lần lượt vuông góc góc AB, AC ($H \in AB, K \in AC$).		
			
1	Chứng minh ΔMBC đồng dạng ΔMHK +) Tứ giác AHMK nội tiếp suy ra $\widehat{MBC} = \widehat{MAC} = \widehat{MHK}$		0,50

		+) Tứ giác ABMC nội tiếp suy ra $\widehat{MCB} = \widehat{MAB} = \widehat{MKH}$ +) Suy ra $\triangle MBC$ đồng dạng $\triangle MHK$	0,50
			0,25
	2	Tìm vị trí của M để HK lớn nhất.	0,50
		CM câu trên suy ra $\frac{BC}{HK} = \frac{MB}{MH}$ mà $MB \geq MH \Rightarrow \frac{BC}{HK} \geq 1 \Rightarrow BC \geq HK$	0,50
		Đẳng thức xảy ra khi H trùng B $\Rightarrow \widehat{ABM} = 90^\circ$ hay M đối xứng với A qua O.	0,25
5	1	Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình $x^2 + 2022x + 2023y^2 + y = xy + 2023xy^2 + 2024$ (1)	
		$(1) \Leftrightarrow (x^2 + 2022x - 2023) - 2023y^2(x-1) - y(x-1) = 1$ $\Leftrightarrow (x-1)(x+2023-2023y^2-y) = 1$ Vì x,y nguyên nên các thừa số của vế trái là ước của 1 do đó ta có hai trường hợp: +) $\begin{cases} x-1=1 \\ x+2023-2023y^2-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \vee y=-\frac{2024}{2023}(l) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ +) $\begin{cases} x-1=-1 \\ x+2023-2023y^2-y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \vee y=-\frac{2024}{2023}(l) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$ Vậy phương trình có hai nghiệm: $(2;1), (0;1)$.	0,25 0,25 0,50 0,50
	2	Tìm các số nguyên dương sao cho $n^2 + 2n + \sqrt{n^2 + 2n + 18} + 9$ là số chính phương.	
		Do $n^2 + 2n + \sqrt{n^2 + 2n + 18} + 9$ là số chính phương nên $\sqrt{n^2 + 2n + 18}$ là số tự nhiên Đặt $\sqrt{n^2 + 2n + 18} = k^2$ (k là số tự nhiên)	0,50
		$\sqrt{n^2 + 2n + 18} = k^2 \Leftrightarrow (k+n+1)(k-n-1) = 17$ $\Rightarrow \begin{cases} k=9 \\ n=7 \end{cases}$	0,75
		KL: $n = 7$ thỏa mãn bài toán.	0,25

--- HẾT ---

