

Câu 1. (5 điểm)

1. Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{1 - \sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{1 + \sqrt{ab}} \right) : \left(1 + \frac{a - b}{1 - ab} \right)$

a) Tìm điều kiện xác định của A và rút gọn biểu thức A.

b) Tính giá trị của A với $a = \frac{2}{2 - \sqrt{3}}$.

c) Tìm giá trị lớn nhất của A.

2. Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $7x^2 - 13xy - 2y^2 = 0$.

Tính giá trị của biểu thức $B = \frac{2x - 6y}{7x + 4y}$

Câu 2. (5 điểm)

1. Giải các phương trình sau:

a) $x^2 + \sqrt{x + 11} - 11 = 0$

b) $(x - 3)(x + 1) - 4(x - 3) \cdot \sqrt{\frac{x + 1}{x - 3}} = -3$

2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} xy - 2x + y = 6 \\ (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 8 \end{cases}$$

Câu 3. (5 điểm) Cho AB là đường kính của đường tròn (O; R). C là một điểm thay đổi trên đường tròn (C khác A và B), kẻ CH vuông góc với AB tại H. Gọi I là trung điểm của AC; OI cắt tiếp tuyến tại A của đường tròn (O; R) tại M; MB cắt CH tại K.

a) Chứng minh 4 điểm C, H, O, I cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh MC là tiếp tuyến của (O; R).

c) Chứng minh K là trung điểm của CH

Câu 4. (2 điểm) Cho tam giác đều ABC. Trên các cạnh BC, CA, AB lần lượt lấy ba điểm bất kỳ I, J, K sao cho K khác A, B và $\widehat{IKJ} = 60^\circ$.

Chứng minh rằng: $AJ \cdot BI \leq \frac{AB^2}{4}$. Dấu “=” xảy ra khi nào?

Câu 5. (3 điểm)

1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^3 + y^3 = 3xy + 3$.

2. Cho a, b, c là các số dương, chứng minh rằng: $\frac{a^3 + b^3}{2ab} + \frac{b^3 + c^3}{2bc} + \frac{c^3 + a^3}{2ca} \geq a + b + c$.

.....**Hết**.....

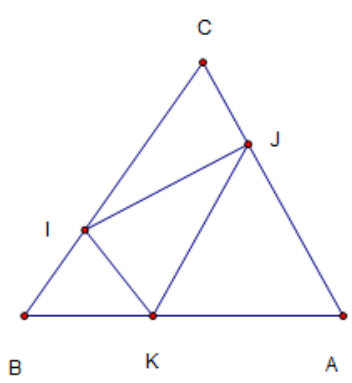
Họ và tên thí sinh.....số báo danh.....

Chữ ký của giám thị 1..... chữ ký của giám thị 2.....

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
Câu 1 (5.0 điểm)	1	$A = \left(\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{1 - \sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{1 + \sqrt{ab}} \right) : \left(1 + \frac{a - b}{1 - \sqrt{ab}} \right)$	
		a) ĐKXĐ của A là $\begin{cases} a \geq 0, b \geq 0 \\ ab \neq 1 \\ b \neq 1 \end{cases}$	0,5
		Ta có: $\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{1 - \sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{1 + \sqrt{ab}} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(1 + \sqrt{ab}) + (\sqrt{a} + \sqrt{b})(1 - \sqrt{ab})}{(1 - \sqrt{ab})(1 + \sqrt{ab})}$ $= \frac{2\sqrt{a} - 2b\sqrt{a}}{1 - ab} = \frac{2\sqrt{a}(1 - b)}{1 - ab}$	0,25
		$1 + \frac{a - b}{1 - ab} = \frac{(1 + a)(1 - b)}{1 - ab}$	0,25
		Khi đó $A = \frac{2\sqrt{a}(1 - b)}{1 - ab} \cdot \frac{1 - ab}{(1 + a)(1 - b)} = \frac{2\sqrt{a}}{1 + a}$	0,5
		b) Với $a = \frac{2}{2 - \sqrt{3}} = \frac{2(2 + \sqrt{3})}{4 - 3} = 4 + 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} + 1)^2$	0,25
		Suy ra $A = \frac{2\sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2}}{1 + 4 + 2\sqrt{3}} = \frac{2(\sqrt{3} + 1)}{5 + 2\sqrt{3}} = \frac{2(\sqrt{3} + 1)(5 - 2\sqrt{3})}{25 - 12} = \frac{2(3\sqrt{3} - 1)}{13}$	0,75
		c) Vì $a \geq 0$ nên ta có $(\sqrt{a} - 1)^2 \geq 0 \Rightarrow a - 2\sqrt{a} + 1 \geq 0$ $\Rightarrow 2\sqrt{a} \leq a + 1 \Rightarrow \frac{2\sqrt{a}}{a + 1} \leq 1 \Rightarrow A \leq 1$	0,5
		Dấu “=” xảy ra khi $a = 1$. Vậy GTLN của A là 1 khi $a = 1$.	0,5
	2	Ta có $7x^2 - 13xy - 2y^2 = 0 \Leftrightarrow (7x + y)(x - 2y) = 0$ $\Leftrightarrow x = 2y \quad (\text{do } x > 0, y > 0)$	0,5
		Thay vào biểu thức B, ta được $B = \frac{2.2y - 6y}{7.2y + 4y} = \frac{-2y}{18y} = -\frac{1}{9}.$ Vậy $B = -\frac{1}{9}$	1

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
Câu 2 (5.0 điểm)	1	a) $x^2 + \sqrt{x+11} - 11 = 0$ (1) ĐKXĐ: $x \geq -11$	0,25
		$(1) \Leftrightarrow x^2 - (x+11) + x + \sqrt{x+11} = 0$ $\Leftrightarrow (x - \sqrt{x+11})(x + \sqrt{x+11}) + x + \sqrt{x+11} = 0$ $\Leftrightarrow (x + \sqrt{x+11})(x - \sqrt{x+11} + 1) = 0$	0,25
		$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \sqrt{x+11} = 0 & (1') \\ x - \sqrt{x+11} + 1 = 0 & (2') \end{cases}$	0,25
		$(1') \Leftrightarrow \sqrt{x+11} = -x \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x+11 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x = \frac{1+3\sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{1-3\sqrt{5}}{2} \end{cases}$ $\Leftrightarrow x = \frac{1-3\sqrt{5}}{2}$ (thỏa mãn đk)	0,25
		$(2') \Leftrightarrow \sqrt{x+11} = x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x+11 = (x+1)^2 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 + x - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x = \frac{-1+\sqrt{41}}{2} \\ x = \frac{-1-\sqrt{41}}{2} \end{cases}$ $\Leftrightarrow x = \frac{-1+\sqrt{41}}{2}$ (thỏa mãn đk)	0,25
		Vậy phương trình có tập nghiệm $\left\{ \frac{1-3\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{41}}{2} \right\}$	0,25
		b) $(x-3)(x+1) - 4(x-3) \cdot \sqrt{\frac{x+1}{x-3}} = -3$ (2) ĐKXĐ: $x \leq -1$ hoặc $x > 3$	0,25
		Xét $x > 3$. Khi đó $(x-3) \cdot \sqrt{\frac{x+1}{x-3}} = \sqrt{(x-3)(x+1)}$ Đặt $\sqrt{(x-3)(x+1)} = y$ ($y \geq 0$) thì $(2) \Leftrightarrow y^2 - 4y + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 & (n) \\ y = 3 & (n) \end{cases}$	0,25

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
		Với $y = 1$ thì $\sqrt{(x-3)(x+1)} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \sqrt{5} & (n) \\ x = 1 - \sqrt{5} & (1) \end{cases}$	0,25
		Với $y = 3$ thì $\sqrt{(x-3)(x+1)} = 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \sqrt{13} & (n) \\ x = 1 - \sqrt{13} & (1) \end{cases}$	0,25
		Xét $x \leq -1$. Khi đó $(x-3) \cdot \sqrt{\frac{x+1}{x-3}} = -\sqrt{(x-3)(x+1)}$ Đặt $\sqrt{(x-3)(x+1)} = y$ ($y \geq 0$) thì $(2) \Leftrightarrow y^2 + 4y + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 & (1) \\ y = -3 & (1) \end{cases}$	0,25
		Vậy phương trình có tập nghiệm $\{1 + \sqrt{5}; 1 + \sqrt{13}\}$	0,25
		2) $\begin{cases} xy - 2x + y = 6 \\ (x+1)^2 + (y-2)^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(y-2) = 4 \\ (x+1)^2 + (y-2)^2 = 8 \end{cases}$	0,25
		Đặt $a = x+1$, $b = y-2$ Ta có hệ phương trình $\begin{cases} ab = 4 \\ a^2 + b^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab = 4 \\ (a+b)^2 - 2ab = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab = 4 \\ (a+b)^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab = 4 \\ a+b = \pm 4 \end{cases}$	0,5
	2	+) $\begin{cases} ab = 4 \\ a+b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = 2 \\ y-2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$	0,5
		+) $\begin{cases} ab = 4 \\ a+b = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = -2 \\ y-2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 0 \end{cases}$	0,5
		Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x, y) \in \{(1; 4), (-3; 0)\}$	0,25
Câu 3 (5.0 điểm)			0,5

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
	a	Chứng minh 4 điểm C, H, O, I cùng thuộc một đường tròn	
		Chứng minh $OI \perp AC \Rightarrow \Delta OIC$ vuông tại I $\Rightarrow$ I thuộc đường tròn đường kính OC.	0,5
		$CH \perp AB(gt) \Rightarrow \Delta CHO$ vuông tại H $\Rightarrow$ H thuộc đường tròn đường kính OC.	0,5
		$\Rightarrow$ I, H cùng thuộc đường tròn đường kính OC. Hay 4 điểm C, I, H, O cùng thuộc một đường tròn đường kính OC.	0,5
	b	Chứng minh MC là tiếp tuyến của đường tròn (O, R)	
		- Chứng minh $\widehat{AOM} = \widehat{COM}$	0,5
		- Chứng minh $\Delta AOM = \Delta COM$	0,5
		- Chứng minh $MC \perp CO$ $\Rightarrow MC$ là tiếp tuyến của (O, R)	0,5
	c	Chứng minh K là trung điểm của CH ΔMAB có KH // MA (vì cùng $\perp AB$) $\Rightarrow \frac{KH}{AM} = \frac{HB}{AB} \Rightarrow KH = \frac{AM.HB}{AB} = \frac{AM.HB}{2R} \quad (1)$	0,5
		Chứng minh CB // MO $\Rightarrow \widehat{AOM} = \widehat{CBH}$ (đồng vị) Chứng minh $\Delta MAO \sim \Delta CHB \Rightarrow \frac{MA}{CH} = \frac{AO}{HB} \Rightarrow CH = \frac{AM.HB}{AO} = \frac{AM.HB}{R} \quad (2)$	0,5
		Từ (1) và (2) $\Rightarrow CH = 2CK \Rightarrow CK = KH \Rightarrow K$ là trung điểm của CH.	0,5
Câu 4 (2.0 điểm)			0,25
		Ta có: $\widehat{BKI} = 180^\circ - \widehat{B} - \widehat{BIK} = 120^\circ - \widehat{BIK}$	0,25
		Mà $\widehat{BKI} = 180^\circ - \widehat{IKJ} - \widehat{AKJ} = 120^\circ - \widehat{AKJ}$	0,25
		Suy ra: $\widehat{BIK} = \widehat{AKJ}$	0,25
		Suy ra: $\Delta BIK \sim \Delta AKJ$	0,25

Câu	Ý	Nội dung	Điểm																				
Câu 4 (3.0 điểm)		$\Rightarrow \frac{BI}{AK} = \frac{BK}{AJ}$ $\Rightarrow AJ.BI = AK.BK \leq \left(\frac{AK+BK}{2}\right)^2 = \frac{AB^2}{4}$	0,5																				
		Dấu “ = ” xảy ra khi và chỉ khi $AK = BK$. Hay K là trung điểm của AB.	0,25																				
	1	$x^3 + y^3 = 3xy + 3 \Leftrightarrow (x + y)^3 - 3xy(x + y) = 3xy + 3$. Đặt $x + y = a$; $xy = b$ (a, b là các số nguyên) ta có $a^3 - 3ab = 3b + 3 \Leftrightarrow a^3 - 3 = 3b(a + 1)$ nên $(a^3 - 3):(a + 1)$ $(a^3 + 1 - 4):(a + 1)$ $\Rightarrow 4:(a + 1)$	0,5																				
		Ta lập bảng giá trị sau		0,5																			
<table><tr><td>a + 1</td><td>1</td><td>- 1</td><td>2</td><td>- 2</td><td>4</td><td>- 4</td></tr><tr><td>a</td><td>0</td><td>- 2</td><td>1</td><td>- 3</td><td>3</td><td>- 5</td></tr><tr><td>$b = \frac{a^3 - 3}{3(a + 1)}$</td><td>- 1</td><td>Không nguyên</td><td>Không nguyên</td><td>5</td><td>2</td><td>Không nguyên</td></tr></table>		a + 1	1		- 1	2	- 2	4	- 4	a	0	- 2	1	- 3	3	- 5	$b = \frac{a^3 - 3}{3(a + 1)}$	- 1	Không nguyên	Không nguyên	5	2	Không nguyên
a + 1	1	- 1	2		- 2	4	- 4																
a	0	- 2	1	- 3	3	- 5																	
$b = \frac{a^3 - 3}{3(a + 1)}$	- 1	Không nguyên	Không nguyên	5	2	Không nguyên																	
Trường hợp $a = 0, b = -1$ cho $(x, y) = (1; -1)$, $(x, y) = (-1; 1)$ Trường hợp $a = -3, b = 5$ không cho nghiệm Trường hợp $a = 3, b = 2$ cho $(x, y) = (1; 2)$, $(x, y) = (2; 1)$ Vậy nghiệm nguyên (x, y) của phương trình là $(1; -1)$, $(-1; 1)$, $(1; 2)$, $(2; 1)$		0,5																					
2		Với a, b, c là các số dương, ta có : $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) \geq (a + b)ab$ $\Rightarrow \frac{a^3 + b^3}{2ab} \geq \frac{a + b}{2}$	0,5																				
		Tương tự : $\frac{b^3 + c^3}{2bc} \geq \frac{b + c}{2}; \frac{c^3 + a^3}{2ca} \geq \frac{c + a}{2}$	0,25																				
		Suy ra : $\frac{a^3 + b^3}{2ab} + \frac{b^3 + c^3}{2bc} + \frac{c^3 + a^3}{2ca} \geq \frac{a + b}{2} + \frac{b + c}{2} + \frac{c + a}{2} = a + b + c$.	0,5																				
		Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.	0,25																				

* Chú ý: Học sinh có thể làm cách khác, nếu đúng vẫn cho điểm tối đa.