UBND QUẬN HẢI AN
PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP QUẬN
NĂM HỌC: 2022 – 2023
ĐỀ THI MÔN TOÁN – LỚP 9
Thời gian: 150 phút (không kể giao đề)

Bài 1. (2, 0 điểm)

Cho biểu thức: $M=\dfrac{a+1}{\sqrt{a}}+\dfrac{a\sqrt{a}-1}{a-\sqrt{a}}+\dfrac{a^2-a\sqrt{a}+\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}-a\sqrt{a}}$ với $a>0, a\neq 1$.

a) Chứng minh rằng $M>4$.

b) Với những giá trị nào của a thì biểu thức $N=\dfrac{8}{M}$ nhận giá trị nguyên?

Bài 2. (2, 0 điểm)

1)Giải phương trình: $\sqrt{x-1}+\sqrt{x^3+x^2+x+1}=1+\sqrt{x^4-1}$

2)Tìm tất cả các cặp số hữu tỷ (x,y) thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3-2y^3=x+4y \\ 6x^2-19xy+15y^2=1 \end{cases}$$

Bài 3. (1,0 điểm) Cho 2 số thực dương a, b thỏa mãn điều kiện a + b ≥ 4

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức P = $\sqrt{9+a^2b^2}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$

Bài 4. (3,0 điểm) Cho đường tròn (O; R) và một điểm A nằm ngoài đường tròn (O). Qua A lần lượt kẻ các tiếp tuyến AB, AC đến đường tròn (O) (B, C là các tiếp điểm. Lấy điểm D thuộc đường tròn (O) sao cho BD // AO. Đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai E. Gọi M là trung điểm của AC.

a) Chứng minh rằng ME là tiếp tuyến của đường tròn (O)

b) Gọi T là giao điểm của các đường thẳng ME, BC, I là giao điểm của các đường thẳng DE, BC. Chứng minh OI $\perp$ AT

c) Qua E kẻ đường thẳng song song với đường thẳng AB cắt các đường thẳng BC, BD lần lượt tại các điểm P và Q. Chứng minh rằng: PQ = PE

Bài 5. (2, 0 điểm)

1)Cho các số nguyên dương a,b,c thỏa mãn $a^2+b^2=c^2$ Chứng minh rằng ab chia hết cho: $a+b+c$

2) Trên bảng ta viết 3 số $\sqrt{2},2,\frac{1}{\sqrt{2}}$. Mỗi bước ta chọn 2 số a,b bất kỳ trên bảng, xóa chúng đi và thay bởi 2 số $\frac{a+b}{\sqrt{2}},\frac{a-b}{\sqrt{2}}$ và giữ nguyên số còn lại. Hỏi sau một số hữu hạn bước, ta có thể thu được 3 số $\sqrt{2},1+\sqrt{2},\frac{1}{2\sqrt{2}}$ trên bảng được không?

----------Hết----------

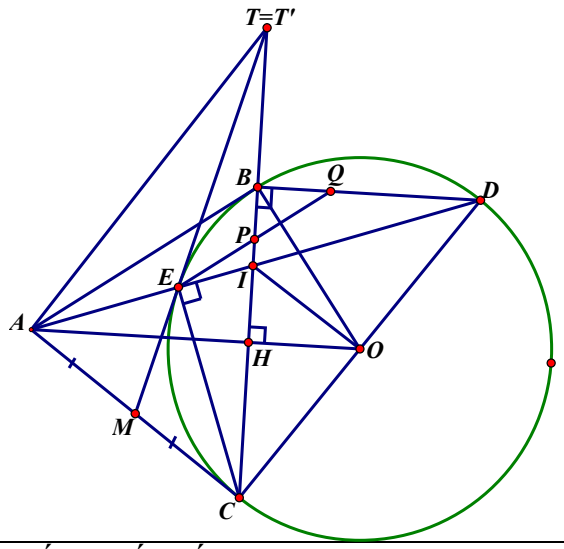
UBND QUẬN HẢI AN
PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP QUẬN
NĂM HỌC: 2022 – 2023

ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM

Bài	Đáp án	Điểm
Câu 1 (2,0 điểm)	**a)(1.0 điểm)**	
	$=\dfrac{a+1}{\sqrt{a}}+\dfrac{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(a+\sqrt{a}+1\right)}{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}-1\right)}+\dfrac{(a-1)\left(a-\sqrt{a}+1\right)}{\sqrt{a}(1-a)}$	0,25
	$=\dfrac{a+1+a+\sqrt{a}+1-a+\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}}=\dfrac{a+2\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}}$	0,25
	Do $a>0, a\neq 1$ nên $\left(\sqrt{a}-1\right)^2>0\Leftrightarrow a+1>2\sqrt{a}$	0,25
	Khi đó ta có $M=\dfrac{a+2\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}}>\dfrac{4\sqrt{a}}{\sqrt{a}}=4$ (ĐPCM)	0,25
	b)(1.0 điểm)	
	Ta có $0<N=\dfrac{8}{M}<\dfrac{8}{4}=2$ Do đó N chỉ có thể nhận giá trị nguyên là 1	0,25
	$N=\dfrac{8}{M}=1\Leftrightarrow\dfrac{8\sqrt{a}}{a+2\sqrt{a}+1}=1\Leftrightarrow a-6\sqrt{a}+9=8$	0,25
	$\Leftrightarrow\left(\sqrt{a}-3\right)^2=8\Leftrightarrow\sqrt{a}=3\pm 2\sqrt{2}\Leftrightarrow a=\left(3\pm 2\sqrt{2}\right)^2(TM)$	0,25
	Vậy $a=\left(3\pm 2\sqrt{2}\right)^2$ thì biểu thức $N=\dfrac{8}{M}$ nhận giá trị nguyên	0,25
Câu 2 (2,0 điểm)	**1)(1.0 điểm)**	
	ĐKXĐ: $\begin{cases}x-1\geq 0\\ x^3+x^2+x+1\geq 0\Leftrightarrow x\geq 1\\ x^4-1\geq 0\end{cases}$	0,25
	Đặt $a=\sqrt{x-1}; b=\sqrt{x^3+x^2+x+1}$ với $a\geq 0, b\geq 0$ Ta có $\sqrt{x^4-1}=\sqrt{(x-1)\left(x^3+x^2+x+1\right)}=ab$ Khi đó ta có $a+b=1+ab\Leftrightarrow(a-1)(b-1)=0\Leftrightarrow a=1$ hoặc $b=1$	0,25
	Với $a=1$ thì $\sqrt{x-1}=1\Leftrightarrow x=2$ (thỏa mãn)	0,25

	Với $b=1$ thì $\sqrt{x^3+x^2+x+1}=1$ loại Vì $x\ge 1$ ta có $\sqrt{x^3+x^2+x+1}\ge 2$ Vậy PT có nghiệm duy nhất $x=2$	0,25
	2)(1.0 điểm)	
	Ta có $\begin{cases}x^3-2y^3=x+4y\\6x^2-19xy+15y^2=1\end{cases}$ $\Leftrightarrow\begin{cases}x^3-2y^3=x+4y(1)\\(6x^2-19xy+15y^2)(x+4y)=x^3-2y^3(2)\end{cases}$	**0,25**
	Từ (2) ta có $5x^3+5x^2y-61xy^2+62y^3=0$ $\Leftrightarrow 5\left(\frac{x}{y}\right)^3+5\left(\frac{x}{y}\right)^2-61\left(\frac{x}{y}\right)+62=0$ (do $y=0$ không là nghiệm của (2)	**0,25**
	Đặt $\frac{x}{y}=t$ ta có $5t^3+5t^2-61t+62=0\Leftrightarrow(t-2)(5t^2+15t-31)=0$ Mà x,y là số hữu tỷ nên t hữu tỷ nên $t=2\Rightarrow x=2y$ thay vào (1) ta có $y(y-1)(y+1)=0\Leftrightarrow y=\pm 1$	**0,25**
	Vậy	**0,25**
3 (1,0 điểm)	**(1.0 điểm)**	
	Ta có P = $\sqrt{9+a^2b^2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\sqrt{9+a^2b^2}\,\frac{a+b}{ab}=(a+b)\sqrt{\frac{9}{a^2b^2}+1}$	**0,25**
	Áp dụng bất đẳng thức AM – GM có $ab\le\frac{(a+b)^2}{4}$ nên ta có $a^2b^2\le\frac{(a+b)^4}{16}$	0,25
	Suy ra $P\ge(a+b)\sqrt{\frac{144}{(a+b)^4}+1}=\sqrt{(a+b)^2+\frac{144}{(a+b)^2}}$ $P\ge\sqrt{\frac{7(a+b)^2}{16}+\frac{9(a+b)^2}{16}+\frac{144}{(a+b)^2}}\ge\sqrt{\frac{7.4^2}{16}+18}=5$	0,25
	Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi a = b = 2 Vậy min P = 5	0,25
	a) (1,0 điểm)	

Câu 4 (3,0 điểm)		
	Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có OA là đường trung trực của BC Nên OA ⊥BC Mà OA // BD nên BC ⊥ BD, suy ra CD là đường kính của đường tròn (O), hay tam giác AEC vuông tại E	0,5
	Theo giả thiết M là trung điểm AC. Do đó ME = MC = MA Suy ra OM là đường trung trực của CE, hay C và E đối xứng qua OM. Vì OC ⊥ MC nên OE ⊥ME, hay ME tiếp xúc với đường tròn (O)	0,5
	b) (1,0 điểm)	
	Gọi K là trung điểm của DE, H là giao điểm của OA và BC , T' là giao điểm của OK và BC Xét ΔOHT' và ΔOKA có: $\left.\begin{array}{l}\widehat{O} \text{ chung} \\ \widehat{OHT'} = \widehat{OKA}\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta OHT' \sim \Delta OKA$ Suy ra $OK.OT' = OH.OA = OB^2 = OE^2$	0,5
	Từ đây ta có $\frac{OK}{OE} = \frac{OE}{OT'}$ Xét ΔOKE và Δ OET' có: $\left.\begin{array}{l}\widehat{O} \text{ chung} \\ \frac{OK}{OE} = \frac{OE}{OT'}\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta OKE \sim \Delta OET' \text{ (c.g.c)}$ Suy ra $\widehat{OET'} = \widehat{OKE} = 90^0$ Nên T'E là tiếp tuyến của đường tròn (O) Lại có ME là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên M, E, T' thẳng hàng, suy ra T≡T'	0,5

	Xét tam giác AOT có TH và AK là hai đường cao cắt nhau tại I nên I là trực tâm của tam giác. Suy ra OI $\perp$ AT	
	c) (1 điểm)	
	Theo giả thiết ta có PE // AB nên $\widehat{BEP} = \widehat{ABE} = \widehat{BCE}$ Suy ra $\Delta BEP \sim \Delta BCE$ (g.g). Do đó $\frac{BP}{BE}=\frac{PE}{CE}$ hay $\frac{PE}{BP}=\frac{CE}{BE}$ (1) Chứng minh tương tự ta có: $\frac{PQ}{BP} = \frac{CD}{BD}$(2)	0,5
	Dễ thấy $\Delta ABE \sim \Delta ABD$ (g.g), $\Delta ACE \sim \Delta ADC$ (g.g) nên $\frac{BE}{BD} = \frac{CE}{CD}, \frac{CE}{CD} = \frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AC}$ Suy ra $\frac{BE}{BD} = \frac{CE}{CD}$ hay $\frac{CE}{BE} = \frac{CD}{BD}$ (3) Từ (1), (2), (3) suy ra $\frac{PE}{BP} = \frac{PQ}{BP}$ hay PE = PQ	0,5
Câu 5 (2,0 điểm)	**1) (1,0 điểm)**	
	Ta có: $a^2 + b^2 = c^2 \Leftrightarrow 2ab = (a + b)^2 – c^2 \Leftrightarrow 2ab = (a + b + c)(a + b - c)$ (1)	0,25
	Từ trên suy ra a + b và c cùng tính chẵn lẻ và a + b > c	0,25
	Do a + b – c là số nguyên dương chẵn. Đặt a + b – c= 2k với $k \in \mathbb{N}^*$	0,25
	Khi đó, từ (1) ta có ab = k(a + b + c) Vậy ab chia hết cho a + b + c	0,25
	2) (1,0 điểm)	
	Gọi S_n là tổng bình phương các số có trên bảng sau bước thứ n	0,25
	Ta có $S_n = \left(\sqrt{2}\right)^2 + 2^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{13}{2}$	0,25
	Do $a^2 + b^2 = \left(\frac{a+b}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{\sqrt{2}}\right)^2$ nên giá trị của S_n luôn không thay đổi	0,25
	Vì $\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(1+\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{13}{2}$ nên không có thời điểm nào mà trên bảng xuất hiện 3 số $\sqrt{2}$, $1+\sqrt{2}$, $\frac{1}{2\sqrt{2}}$	0,25