

Thí sinh không được sử dụng máy tính cầm tay.

Câu 1. (3,0 điểm)

a) Cho biểu thức $A = \left(\frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 8} - \frac{2x^2}{8 - 4x + 2x^2 - x^3} \right) \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)$. Tìm giá trị nguyên của x để A có giá trị nguyên.

b) Cho x, y, z đôi một khác nhau thỏa mãn $x + y + z = 0$. Tính giá trị của biểu thức:

$$B = \frac{(xy + 2z^2)(yz + 2x^2)(zx + 2y^2)}{(2xy^2 + 2yz^2 + 2zx^2 + 3xyz)^2}.$$

Câu 2. (2,5 điểm)

a) Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^2 + xy - 2014x - 2015y - 2016 = 0$.

b) Cho các số nguyên a, b, c thỏa mãn $2a + b, 2b + c, 2c + a$ đều là các số chính phương. Biết rằng một trong ba số chính phương trên chia hết cho 3.

Chứng minh rằng: $P = (a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3$ chia hết cho 81.

Câu 3. (1,0 điểm) Cho ba số a, b, c thỏa mãn $a \geq \frac{4}{3}, b \geq \frac{4}{3}, c \geq \frac{4}{3}$ và $a + b + c = 6$.

$$\text{Chứng minh rằng: } \frac{a}{a^2 + 1} + \frac{b}{b^2 + 1} + \frac{c}{c^2 + 1} \geq \frac{6}{5}.$$

Câu 4. (2,5 điểm) Cho O là trung điểm của đoạn thẳng AB . Trên cùng một nửa mặt phẳng có bờ là AB vẽ tia Ax, By cùng vuông góc với AB . Trên tia Ax lấy điểm C (khác A), qua O kẻ đường thẳng vuông góc với OC cắt tia By tại D .

a) Chứng minh $\frac{AB}{4BD} = \frac{CA}{AB}$.

b) Kẻ OM vuông góc với CD tại M , từ M kẻ MH vuông góc với AB tại H . Chứng minh BC đi qua trung điểm của MH .

c) Tìm vị trí điểm C trên tia Ax để diện tích tứ giác $ABDC$ nhỏ nhất.

Câu 5. (1,0 điểm) Năm vận động viên mang số 1; 2; 3; 4 và 5 được chia bằng mọi cách thành hai nhóm. Chứng tỏ rằng ở một trong hai nhóm ta luôn có hai vận động viên mà hiệu các số họ mang trùng với một trong các số mà người của nhóm đó mang.

————— Hết —————

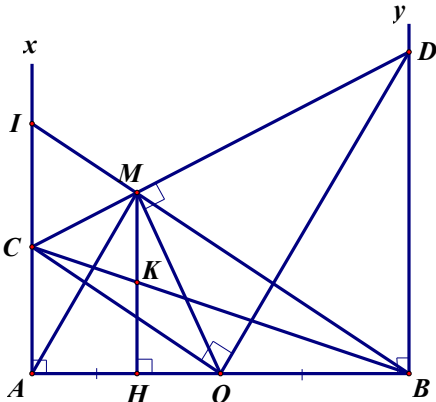
Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Hướng dẫn chung :

- Hướng dẫn chấm chỉ trình bày những ý cơ bản, nếu học sinh có cách giải khác mà đúng thì Giám khảo vẫn cho điểm nhưng không vượt quá thang điểm của mỗi ý đó.
- Câu 4 hình học, học sinh không vẽ hình hoặc vẽ hình sai thì không chấm điểm.
- Tổng điểm toàn bài bằng tổng điểm của các câu không làm tròn.

Đáp án và thang điểm.

Câu	Phần	Nội dung	Thang điểm
1	a.	ĐK: $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 2 \end{cases}$	0,25
		Ta có $A = \left(\frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 8} - \frac{2x^2}{8 - 4x + 2x^2 - x^3} \right) \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)$	0,25
		$= \left(\frac{x^2 - 2x}{2(x^2 + 4)} - \frac{2x^2}{4(2 - x) + x^2(2 - x)} \right) \left(\frac{x^2 - x - 2}{x^2} \right)$	
		$= \left(\frac{x^2 - 2x}{2(x^2 + 4)} - \frac{2x^2}{(x^2 + 4)(2 - x)} \right) \left(\frac{(x + 1)(x - 2)}{x^2} \right) = \left(\frac{x(x - 2)^2 + 4x^2}{2(x - 2)(x^2 + 4)} \right) \left(\frac{(x + 1)(x - 2)}{x^2} \right)$	0,25
		$= \frac{x^3 - 4x^2 + 4x + 4x^2}{2(x^2 + 4)} \cdot \frac{x + 1}{x^2} = \frac{x(x^2 + 4)(x + 1)}{2x^2(x^2 + 4)} = \frac{x + 1}{2x}$	0,5
		Nhận xét : A nguyên khi $x + 1$ chia hết cho $2x \Rightarrow 2x + 2$ chia hết cho $2x \Rightarrow 2$ chia hết cho $2x \Rightarrow 2x$ là ước của 2	0,25
		TH1: $2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ (loại).	0,5
		TH2: $2x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$ (loại).	
	b.	TH3: $2x = 2 \Rightarrow x = 1$ (thỏa mãn).	0,5
		TH4: $2x = -2 \Rightarrow x = -1$ (thỏa mãn).	
		KL: Vậy $x = \pm 1$ thì A có giá trị nguyên .	
		Ta có: $x + y + z = 0 \Rightarrow x + y = -z$.	
		Do đó: $xy + 2z^2 = xy + z^2 - z(x + y) = (z - x)(z - y)$	
		Tương tự : $yz + 2x^2 = (x - y)(x - z)$	0,5
		$zx + 2y^2 = (y - z)(y - x)$	
		$\Rightarrow$ Tử số của B là : $-(x - y)^2(y - z)^2(z - x)^2$	0,25
		Hs cm được : $2xy^2 + 2yz^2 + 2zx^2 + 3xyz = (x - y)(y - z)(z - x)$	
		$\Rightarrow$ mẫu số của B là : $[(x - y)(y - z)(z - x)]^2$	0,25
		Vậy B = -1.	0,25

2	a.	$x^2 + xy - 2014x - 2015y - 2016 = 0 \Leftrightarrow x^2 + xy + x - 2015x - 2015y - 2015 = 1$ $\Leftrightarrow x(x + y + 1) - 2013(x + y + 1) = 1 \Leftrightarrow (x - 2015)(x + y + 1) = 1$	0,5
		$+) \begin{cases} x - 2015 = 1 \\ x + y + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2016 \\ y = -2016 \end{cases};$	0,25
		$+) \begin{cases} x - 2015 = -1 \\ x + y + 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2014 \\ y = -2016 \end{cases}.$	0,25
		KL : Vậy phương trình có nghiệm là : $\begin{cases} x = 2016 \\ y = -2016 \end{cases}; \begin{cases} x = 2014 \\ y = -2016 \end{cases}.$	0,25
	b.	- Vì 3 số $2a+b, 2b+c, 2c+a$ đều là các số chính phương nên 3 số này chia 3 chỉ có thể dư 0 hoặc 1. - Chứng minh nếu $x+y+z=0$ thì $x^3+y^3+z^3=3xyz$	0,25 0,25
Vì trong 3 số trên có 1 số chia hết cho 3 và $(2a+b)+(2b+c)+(2c+a)=3(a+b+c):3$ nên suy ra 3 số cùng chia hết cho 3. Mặt khác : $2a+b=3a-(a-b) \Rightarrow a-b:3$. Tương tự chứng minh được $b-c, c-a$ đều chia hết cho 3. Suy ra: $(a-b)(b-c)(c-a):27$		0,25 0,25	
Vì: $(a-b)+(b-c)+(c-a)=0$ nên $P=(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3=3(a-b)(b-c)(c-a):3.27:81.$		0,25	
3.		$\text{Vì } a \geq \frac{4}{3} \Rightarrow (3a - 4)(a - 2)^2 \geq 0$ $\Leftrightarrow 3a^3 - 16a^2 + 28a - 16 \geq 0$ $\Leftrightarrow 25a \geq 16a^2 + 16 - 3a^3 - 3a$ $\Leftrightarrow 25a \geq (a^2 + 1)(16 - 3a) (*)$ Chia cả hai vế của (*) cho $25(a^2 + 1)$ ta được $\frac{a}{a^2 + 1} \geq \frac{16 - 3a}{25}$ Tương tự ta có : $\frac{b}{b^2 + 1} \geq \frac{16 - 3b}{25}; \frac{c}{c^2 + 1} \geq \frac{16 - 3c}{25}$	0,5
		Do đó : $\frac{a}{a^2 + 1} + \frac{b}{b^2 + 1} + \frac{c}{c^2 + 1} \geq \frac{48 - 3(a + b + c)}{25} = \frac{30}{25} = \frac{6}{5}$ Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 2.$	0,25
		Vậy $\frac{a}{a^2 + 1} + \frac{b}{b^2 + 1} + \frac{c}{c^2 + 1} \geq \frac{6}{5}.$	0,25
4			

	a.	Chứng minh: $\Delta OAC \sim \Delta DBO(g-g)$ $\Rightarrow \frac{OA}{DB} = \frac{AC}{OB} \Rightarrow OA \cdot OB = AC \cdot BD$ $\Rightarrow \frac{AB}{2} \cdot \frac{AB}{2} = AC \cdot BD \Rightarrow \frac{AB}{4BD} = \frac{CA}{AB} \quad (\text{đpcm})$	0,5 0,25 0,25
	b.	Theo câu a ta có: $\Delta OAC \sim \Delta DBO(g-g) \Rightarrow \frac{OC}{OD} = \frac{AC}{OB}$ Mà $OA = OB \Rightarrow \frac{OC}{OD} = \frac{AC}{OA} \Rightarrow \frac{OC}{AC} = \frac{OD}{OA}$ +) Chứng minh: $\Delta OAC \sim \Delta DOC(c-g-c) \Rightarrow \angle ACO = \angle OCM$ +) Chứng minh: $\Delta OAC = \Delta OMC(ch-gn) \Rightarrow AC = MC$	0,25 0,25
		Ta có $\Delta OAC = \Delta OMC \Rightarrow OA = OM; CA = CM \Rightarrow OC$ là trung trực của AM $\Rightarrow OC \perp AM,$ Mặt khác $OA = OM = OB \Rightarrow \Delta AMB$ vuông tại M $\Rightarrow OC \parallel BM$ (vì cùng vuông góc AM) hay $OC \parallel BI$ +) Xét ΔABI có OM đi qua trung điểm AB, song song BI suy ra OM đi qua trung điểm $AI \Rightarrow IC = AC$ +) $MH \parallel AI$ theo hệ quả định lý Ta-lét ta có: $\Rightarrow \frac{MK}{IC} = \frac{BK}{BC} = \frac{KH}{AC}$ Mà $IC = AC \Rightarrow MK = HK \Rightarrow BC$ đi qua trung điểm MH (đpcm)	0,25 0,25
	c.	Tứ giác $ABDC$ là hình thang vuông $\Rightarrow S_{ABDC} = \frac{1}{2}(AC + BD) \cdot AB$ Ta thấy $AC, BD > 0$, nên theo BĐT Cô-si ta có $AC + BD \geq 2\sqrt{AC \cdot BD} = 2\sqrt{\frac{AB^2}{4}} = AB \Rightarrow S_{ABDC} \geq \frac{1}{2}AB^2$ Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow AC = BD = \frac{AB}{2} = OA$ Vậy C thuộc tia Ax và cách điểm A một đoạn bằng OA thì diện tích tứ giác $ABDC$ nhỏ nhất.	0,25 0,25
5		Ta chia các số 1; 2; 3; 4; 5 thành hai nhóm sao cho trong một nhóm hiệu hai số không trùng với một số nào trong nhóm. Ta có hai số 2 và 4 không thể ở trong cùng một nhóm vì $4-2=2$. Số 1 cũng không thể ở trong cùng một nhóm với số 2 vì $2-1=1$	0,5
		Như vậy số 1 phải ở cùng một nhóm với số 4. Số $4-1=3$ phải ở cùng nhóm với số 2. Ta có hai số 1 và 4 cùng nhóm; hai số 2 và 3 cùng một nhóm còn lại. Nhưng còn lại số 5, số này không thể ở trong bất cứ nhóm nào vì $5-1=4$ và $5-2=3$ (Mâu thuẫn). Từ đó suy ra điều phải chứng minh.	0,5

Hết