

Câu 1 (2,0 điểm):

Cho biểu thức: $M = \left(1 - \frac{6 - 2x^3}{x^6 - 9}\right) \cdot \frac{4}{x^5 + 3x^2} : \left[\frac{6x^6 - 24}{x^9 + 6x^6 + 9x^3} : \left(\frac{3x^2}{2} + \frac{3}{x}\right)\right]$

a) Rút gọn M.

b) Tìm các giá trị nguyên của x để M đạt giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất đó.**Câu 2 (2,0 điểm):**

Giải các phương trình và bất phương trình sau:

a) $\frac{x-1}{2015} + \frac{x}{2014} + \frac{2}{1006} = \frac{x-3}{2013} + \frac{x}{2012} + \frac{1}{1007}$

b) $\frac{4}{1+y+y^2} + \frac{1}{1-y} \leq \frac{2y^2-5}{y^3-1}$

Câu 3 (2,5 điểm):

a) Cho ba số x, y, z khác không thỏa mãn:
$$\begin{cases} x + y + z = 2015 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2015} \end{cases}$$

Chứng minh rằng trong ba số x, y, z tồn tại hai số đối nhau.

b) Cho ba số dương a, b, c . Chứng minh rằng: $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}$

Câu 4 (2,5 điểm):

Cho hình vuông ABCD có AC cắt BD tại O. M là điểm bất kỳ thuộc cạnh BC (M khác B, C). Tia AM cắt đường thẳng CD tại N. Trên cạnh AB lấy điểm E sao cho BE = CM.

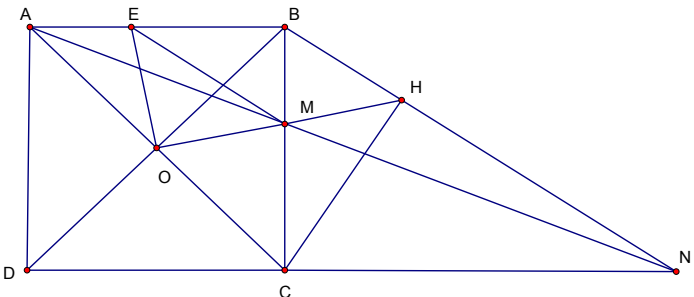
a) Chứng minh: $\triangle OEM$ vuông cân.b) Chứng minh: $ME \parallel BN$.c) Từ C kẻ $CH \perp BN$ ($H \in BN$). Chứng minh ba điểm O, M, H thẳng hàng.**Câu 5 (1 điểm):**Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $5x^2 + 2y^2 + 4xy - 2x + 4y + 2015$.

-----Hết-----

NĂM HỌC 2014 - 2015

Môn: Toán - Lớp 8

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
1 (2,0 điểm)	a	ĐKXD: $x \neq 0; x^3 \neq \pm 3; x^3 \neq 2.$ $M = \left(1 - \frac{6-2x^3}{x^6-9}\right) \cdot \frac{4}{x^5+3x^2} : \left[\frac{6x^6-24}{x^9+6x^6+9x^3} : \left(\frac{3x^2}{2} + \frac{3}{x}\right)\right]$ $= \left(1 + \frac{2(x^3-3)}{(x^3)^2-3^2}\right) \cdot \frac{4}{x^2(x^3+3)} : \left[\frac{6[(x^3)^2-4]}{x^3(x^6+6x^3+9)} : \left(\frac{3(x^3+2)}{2x}\right)\right]$ $= \left(1 + \frac{2}{x^3+3}\right) \cdot \frac{4}{x^2(x^3+3)} : \left[\frac{6[(x^3)^2-4]}{x^3(x^3+3)^2} \cdot \frac{2x}{3(x^3+2)}\right]$ $= \frac{x^3+5}{x^3+3} \cdot \frac{4}{x^2(x^3+3)} \cdot \frac{x^2 \cdot (x^3+3)^2}{4(x^3-2)} = \frac{x^3+5}{x^3-2}$	0,25 0,25 0,25 0,25
	b	Ta có: $M = \frac{x^3+5}{x^3-2} = 1 + \frac{7}{x^3-2}$ M có giá trị lớn nhất khi x^3-2 có giá trị nhỏ nhất mà $x \in Z$ nên x^3-2 phải có giá trị nguyên dương nhỏ nhất $\Rightarrow x^3-2=6 \Rightarrow x=2$ Vậy $x=2$ thì M có giá trị lớn nhất và bằng $\frac{13}{6}$	0,25 0,5 0,25
2 (2,0 điểm)	a	$\frac{x-1}{2015} + \frac{x}{2014} + \frac{2}{1006} = \frac{x-3}{2013} + \frac{x}{2012} + \frac{1}{1007}$ $\Leftrightarrow \frac{x-1}{2015} + \frac{x-2}{2014} + \frac{2}{2014} + \frac{2}{1006} = \frac{x-3}{2013} + \frac{x-4}{2012} + \frac{4}{2012} + \frac{1}{1007}$ $\Leftrightarrow \frac{x-1}{2015} + \frac{x-2}{2014} + \frac{1}{1007} + \frac{4}{2012} = \frac{x-3}{2013} + \frac{x-4}{2012} + \frac{4}{2012} + \frac{1}{1007}$ $\Leftrightarrow \frac{x-1}{2015} - 1 + \frac{x-2}{2014} - 1 = \frac{x-3}{2013} - 1 + \frac{x-4}{2012} - 1$ $\Leftrightarrow \frac{x-2016}{2015} + \frac{x-2016}{2014} = \frac{x-2016}{2013} + \frac{x-2016}{2012}$ $\Leftrightarrow (x-2016)\left(\frac{1}{2015} + \frac{1}{2014} - \frac{1}{2013} - \frac{1}{2012}\right) = 0 \Leftrightarrow x = 2016$	0,25 0,25 0,25 0,25
	b	ĐK: $y \neq 1$ $\frac{4}{1+y+y^2} + \frac{1}{1-y} \leq \frac{2y^2-5}{y^3-1} \Leftrightarrow \frac{4(1-y)+1+y+y^2}{(1+y+y^2)(1-y)} + \frac{2y^2-5}{1-y^3} \leq 0$ $\Leftrightarrow \frac{3y^2-3y}{1-y^3} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3y(y-1)}{1-y^3} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3y(y-1)}{(1-y)(1+y+y^2)} \leq 0$ $\Leftrightarrow \frac{-3y}{1+y+y^2} \leq 0 \Leftrightarrow -3y \leq 0 \Leftrightarrow y \geq 0$ Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là $\begin{cases} y \geq 0 \\ y \neq 1 \end{cases}$	0,25 0,25 0,25 0,25

	a	$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=1$ $\Leftrightarrow (x+y+z)(xy+yz+zx)-xyz=0$ $\Leftrightarrow x(xy+xz)+xyz+(y+z)(xy+xz)+yz(y+z)-xyz=0$ $\Leftrightarrow x^2(y+z)+x(y+z)^2+yz(y+z)=0$ $\Leftrightarrow (y+z)(x^2+xy+xz+yz)=0$ $\Leftrightarrow (x+y(y+z)(z+x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ y+z=0 \\ z+x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-y \\ y=-z \\ z=-x \end{cases}$ Vậy trong ba số x, y, z tồn tại hai số đối nhau	0,25 0,25
3 (2,5 điểm)	b	Ta có: $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z} \forall x, y, z > 0$ (1) Thật vậy, áp dụng BĐT Bunhiacopxki ta có: $(x+y+z)\left(\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\right)$ $= \left[(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2 + (\sqrt{z})^2 \right] \left[\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{y}}\right)^2 + \left(\frac{c}{\sqrt{z}}\right)^2 \right]$ $\geq \left[\sqrt{x} \cdot \frac{a}{\sqrt{x}} + \sqrt{y} \cdot \frac{b}{\sqrt{y}} + \sqrt{z} \cdot \frac{c}{\sqrt{z}} \right]^2 = (a+b+c)^2$ $\Rightarrow \frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z} \forall x, y, z > 0.$ Áp dụng BĐT (1) ta có: $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)} = \frac{a+b+c}{2} \forall a, b, c > 0$ $\Rightarrow \text{ĐPCM. Dấu "}" xảy ra} \Leftrightarrow a=b=c$	0,25 0,25 0,25
4 (2,5 điểm)	a	 Xét $\triangle OEB$ và $\triangle OMC$ Vì ABCD là hình vuông nên ta có $OB = OC$	0,25

		Và $\widehat{EBO} = \widehat{MCO} = 45^\circ$ $BE = CM$ (gt) Suy ra $\triangle OEB = \triangle OMC$ (c.g.c) $\Rightarrow OE = OM$ và $\widehat{EOB} = \widehat{MOC}$ Lại có $\widehat{O_2} + \widehat{O_3} = \widehat{BOC} = 90^\circ$ vì tứ giác ABCD là hình vuông $\widehat{EOM} = \widehat{EOB} + \widehat{MOB} = \widehat{MOC} + \widehat{MOB} = \widehat{COB} = 90^\circ$ kết hợp với $OE = OM \Rightarrow \triangle OEM$ vuông cân tại O	0,25 0,25
	b	Từ (gt) tứ giác ABCD là hình vuông $\Rightarrow AB = CD$ và $AB \parallel CD$ $+ AB \parallel CD \Rightarrow AB \parallel CN \Rightarrow \frac{AM}{MN} = \frac{BM}{MC}$ (Theo ĐL Ta-lét) (*) Mà $BE = CM$ (gt) và $AB = CD \Rightarrow AE = BM$ thay vào (*) Ta có: $\frac{AM}{MN} = \frac{AE}{EB} \Rightarrow ME \parallel BN$ (theo ĐL đảo của ĐL Ta-lét)	0,25 0,25 0,25
	c	Gọi H' là giao điểm của OM và BN Từ $ME \parallel BN \Rightarrow \widehat{OME} = \widehat{MH'B}$ (cặp góc đồng vị) Mà $\widehat{OME} = 45^\circ$ vì $\triangle OEM$ vuông cân tại O $\Rightarrow \widehat{MH'B} = 45^\circ = \widehat{MCO}$ $\Rightarrow \triangle OMC \sim \triangle BMH'$ (g.g) $\Rightarrow \frac{OM}{MB} = \frac{MC}{MH'}$, kết hợp $\widehat{OMB} = \widehat{CMH'}$ (hai góc đối đỉnh) $\Rightarrow \triangle OMB \sim \triangle CMH'$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{OBM} = \widehat{MH'C} = 45^\circ$ Vậy $\widehat{BH'C} = \widehat{BH'M} + \widehat{MH'C} = 90^\circ \Rightarrow CH' \perp BN$ Mà $CH \perp BN$ ($H \in BN$) $\Rightarrow H \equiv H'$ hay 3 điểm O, M, H thẳng hàng	0,5 0,5
5 (1,0 điểm)		Ta có: $5x^2 + 2y^2 + 4xy - 2x + 4y + 2015$ $4x^2 + 4xy + y^2 + y^2 + 4y + 4 + x^2 - 2x + 1 + 2010$ $= (2x + y)^2 + (y + 2)^2 + (x - 1)^2 + 2010 \geq 2010 \forall x, y, z$ Vậy $\text{Min}(A) = 2010 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$	0,25 0,5 0,25
		Tổng điểm	10,0