

Câu 1. Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2x}{x^3+x-x^2-1} \right) : \left(1 - \frac{2x}{x^2+1} \right)$

- Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức A .
- Tìm x để A nhận giá trị là số âm.
- Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức $(x+2).A$ nhận giá trị là số nguyên.

Câu 2.

- Cho $S = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \dots + k(k+1)(k+2)$ (với $k \in \mathbb{N}^*$).

Chứng minh rằng: $4S + 1$ là bình phương của một số tự nhiên.

- Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $x^3 + 2x^2 + 3x + 2 = y^3$.

Câu 3.

- Giải phương trình sau: $x^2 - 3x + 2 + |x-1| = 0$

b. Xác định giá trị của m để phương trình: $m^3(x-2) - 8(x+m) = 4m^2$ có nghiệm duy nhất là số không lớn hơn 1.

- Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $x + y + z = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{16x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{z}$$

Câu 4. Cho tam giác ABC đều cạnh $2a$, M là trung điểm của BC . Góc $\widehat{xMy} = 60^\circ$ quay quanh đỉnh M cố định sao cho hai tia Mx, My cắt AB, AC lần lượt tại D và E . Chứng minh rằng:

a. Tam giác BDM đồng dạng với tam giác CME và tích $BD.CE$ không phụ thuộc vào vị trí của $\widehat{xMy}$.

b. DM là phân giác của $\widehat{BDE}$.

c. $BD.ME + CE.MD > a.DE$.

d. Chu vi tam giác ADE không đổi khi $\widehat{xMy}$ quay quanh M .

Câu 5. Trong bảng ô vuông kích thước 8×8 gồm 64 ô vuông đơn vị, người ta đánh dấu 13 ô bất kì. Chứng minh rằng với mọi cách đánh dấu luôn có ít nhất 4 ô được đánh dấu không có điểm chung (hai ô có điểm chung là 2 ô chung đỉnh hoặc chung cạnh).

----- HẾT -----

Thí sinh không được sử dụng máy tính cầm tay.

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm!

Họ và tên thí sinh: Số báo danh: Phòng thi:

Hướng dẫn chung:

-Học sinh giải theo cách khác mà đúng, đảm bảo tính lôgic, khoa học thì giám khảo vẫn cho điểm tối đa.

-Câu 4, học sinh không vẽ hình hoặc vẽ hình sai phần nào không chấm điểm phần đó.

Bài	Nội dung	Điểm
1a	ĐKXD: $x \neq 1$	0,25
	Rút gọn được $A = \frac{1}{x-1}$	0,75
1b	$A < 0 \Leftrightarrow x-1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$	0,25
	Đối chiếu với ĐKXD, ta được $x < 1$	0,25
1c	Ta có: $(x+2).A = \frac{x+2}{x-1} = 1 + \frac{3}{x-1}$	0,25
	Lập luận để suy ra: $x \in \{0; -2; 2; 4\}$	0,25
2a	Ta có: $k(k+1)(k+2) = \frac{1}{4} k(k+1)(k+2).4 = \frac{1}{4} k(k+1)(k+2).[(k+3)-(k-1)]$	0,25
	$= \frac{1}{4} k(k+1)(k+2)(k+3) - \frac{1}{4} k(k+1)(k+2)(k-1)$	
	$\Rightarrow 4S = 1.2.3.4 - 0.1.2.3 + 2.3.4.5 - 1.2.3.4 + \dots + k(k+1)(k+2)(k+3) - k(k+1)(k+2)(k-1) = k(k+1)(k+2)(k+3)$	0,25
	$\Rightarrow 4S + 1 = k(k+1)(k+2)(k+3) + 1$	0,25
	Mặt khác: $k(k+1)(k+2)(k+3) + 1 = k(k+3)(k+1)(k+2) + 1$ $= (k^2 + 3k)(k^2 + 3k + 2) + 1 = (k^2 + 3k + 1)^2$	0,25
	Mà $k \in \mathbb{N}^*$ nên $k^2 + 3k + 1 \in \mathbb{N}^*$. nên suy ra đpcm.	0,25
2b	Ta có $y^3 - x^3 = 2x^2 + 3x + 2 = 2\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} > 0 \Rightarrow x < y$ (1)	0,25
	$(x+2)^3 - y^3 = 4x^2 + 9x + 6 = \left(2x + \frac{9}{4}\right)^2 + \frac{15}{16} > 0 \Rightarrow y < x+2$ (2)	0,25
	Từ (1) và (2) ta có $x < y < x+2$ mà x, y nguyên suy ra $y = x + 1$	0,25
	Thay $y = x + 1$ vào pt ban đầu và giải phương trình tìm được $x = -1; x = 1$ từ đó tìm được hai cặp số (x, y) thỏa mãn bài toán là: $(-1; 0) (1; 2)$	0,25
3a	$x^2 - 3x + 2 + x-1 = 0$ (1)	
	+ Nếu $x \geq 1$: (1) $\Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (thỏa mãn điều kiện $x \geq 1$).	0,25
	+ Nếu $x < 1$: (1) $\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 3(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3) = 0$ $\Leftrightarrow x = 1; x = 3$ (cả hai đều không bé hơn 1, nên bị loại)	0,25
	Vậy: Phương trình (1) có một nghiệm duy nhất là $x = 1$.	0,25
3b	Ta có $m^3(x-2) - 8(x+m) = 4m^2$	
	$\Leftrightarrow (m^3 - 8)x = 2m(m^2 + 2m + 4)$	

4d	Kẻ MH, MI, MK lần lượt vuông góc với AB, DE, AC tại H, I, K, suy ra $MH=MI=MK$. Suy ra $DI=DH, EI=EK$. Suy ra Chu vi tam giác ADE bằng $2AH$. Vì $\widehat{HBM} = 60^0$ và $BM=a$ nên $BH=\frac{a}{2} \Rightarrow AH = \frac{3a}{2}$. Suy ra chu vi tam giác ADE không đổi và bằng $3a$.	0,25 0,25																																																																
5	Chia 64 ô vuông của bảng 8x8 thành 4 loại như hình vẽ (Các ô cùng loại được đánh số giống nhau). Khi đó theo cách chia này rõ ràng các ô trong cùng loại sẽ không có điểm chung. Khi đánh dấu 13 điểm bất kì, thì 13 điểm này sẽ thuộc 4 loại ô vừa chia. Vì $13=4.3+1$ nên theo nguyên lí Dirichlê sẽ tồn tại ít nhất 4 ô thuộc cùng 1 loại, khi đó 4 ô này sẽ không có điểm chung. Suy ra đpcm. <table><tr><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>3</td><td>4</td><td>3</td><td>4</td><td>3</td><td>4</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>3</td><td>4</td><td>3</td><td>4</td><td>3</td><td>4</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>3</td><td>4</td><td>3</td><td>4</td><td>3</td><td>4</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>3</td><td>4</td><td>3</td><td>4</td><td>3</td><td>4</td><td>3</td><td>4</td></tr></table>	1	2	1	2	1	2	1	2	3	4	3	4	3	4	3	4	1	2	1	2	1	2	1	2	3	4	3	4	3	4	3	4	1	2	1	2	1	2	1	2	3	4	3	4	3	4	3	4	1	2	1	2	1	2	1	2	3	4	3	4	3	4	3	4	0,25 0,25
1	2	1	2	1	2	1	2																																																											
3	4	3	4	3	4	3	4																																																											
1	2	1	2	1	2	1	2																																																											
3	4	3	4	3	4	3	4																																																											
1	2	1	2	1	2	1	2																																																											
3	4	3	4	3	4	3	4																																																											
1	2	1	2	1	2	1	2																																																											
3	4	3	4	3	4	3	4																																																											