

Họ và tên học sinh: .....

Thời gian làm bài: 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Số báo danh: .....

Ngày thi: 16/09/2022

**Bài 1. (3 điểm)**

Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} (x^3 - y^3) - 3(x^2 - y^2) + 6(x - y) = 3 \ln \left( \frac{\sin y + \cos y + 2}{\sin x + \cos x + 2} \right) \\ xy = \sqrt{16x + 12y + 45} \end{cases} \text{ với } (x, y \in \mathbb{R}).$$

**Bài 2. (3 điểm)**

Cho dãy số  $(x_n)$ :  $x_1 = \sqrt{2026}$ ,  $x_{n+1} = x_n^2 - 2$  với  $n = 1, 2, \dots$ . Tìm giới hạn  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_1 x_2 \dots x_n}$ .

**Bài 3. (3 điểm)**

Cho  $p$  là một số nguyên tố. Chứng minh rằng với  $a$  là số nguyên dương sao cho  $a^p - 1$  chia hết cho  $p$  thì  $a^p - 1$  cũng chia hết cho  $p^2$ .

**Bài 4. (5 điểm)**

Cho tam giác  $ABC$  không cân, có  $(I)$  là đường tròn nội tiếp, các tiếp điểm trên  $BC, CA, AB$  lần lượt là  $D, E, F$ ;  $AD$  cắt  $EF$  tại  $J$ . Các điểm  $M, N$  di chuyển trên  $(I)$  sao cho  $M, N, J$  thẳng hàng,  $DM$  cắt  $AC$  tại  $P$ ,  $DN$  cắt  $AB$  tại  $Q$ . Gọi  $U, V$  lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng  $(ME; FN), (MF; EN)$ .

a. Gọi  $G$  là giao điểm của  $EF$  và  $BC$ , chứng minh  $G, U, V$  thẳng hàng.

b. Chứng minh  $MN, PQ, UV$  đồng quy.

**Bài 5. (3 điểm)**

Cho các số thực dương  $a, b, c$  thỏa mãn điều kiện  $a^2 + b^2 + c^2 = 2$ .

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: 
$$P = \sqrt{\frac{1}{2} \left( \frac{ab}{2+c^2} + \frac{bc}{2+a^2} \right)} - \frac{1}{64} \left( \frac{a^4 b^4 + b^4 c^4}{a^4 c^4} \right).$$

**Bài 6. (3 điểm)**

Xét 300 viên bi mà mỗi viên bi có một màu và tổng tất cả các màu của tất cả 300 viên bi là 25. Một viên bi được gọi là viên bi đặc biệt nếu trong 299 viên bi còn lại có không quá 9 viên bi cùng màu với nó. Hỏi trong số 300 viên bi có tối đa bao nhiêu viên bi đặc biệt.