

Câu 1. (4,0 điểm)

Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 4$ có đồ thị (C) .

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2. Tìm m để đường thẳng $y = m(x + 2)$ cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt sao cho tiếp tuyến với đồ thị (C) tại ba điểm đó tạo thành tam giác vuông.

Câu 2. (4,0 điểm)

1. Giải phương trình: $\sin x(2\sqrt{3}\cos x - 3) + 2(\sin x + 1) = \sqrt{3}\cos x - \cos 2x$.

2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x} \ln\left(1 + \frac{2}{\sqrt{x}}\right) = \ln\left(1 + \frac{2}{y}\right) \\ \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{2}{xy}} = \frac{2y + 3xy}{5y + 6} \end{cases} \quad (x; y \in \mathbb{R}).$$

Câu 3. (4,0 điểm)

1. Gọi X là tập hợp các số tự nhiên có 6 chữ số đôi một khác nhau lấy từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập X . Tính xác suất để số được chọn là số chẵn, có mặt hai chữ số 1 và 2, đồng thời 1 và 2 không đứng cạnh nhau.
2. Để đủ tiền mua nhà, anh An vay ngân hàng 500 triệu theo phương thức trả góp với lãi suất 0,85%/tháng. Sau mỗi tháng, kể từ thời điểm vay, anh An trả nợ cho ngân hàng số tiền cố định là 10 triệu đồng bao gồm cả tiền lãi vay và tiền gốc. Biết lãi suất không thay đổi trong suốt quá trình anh An trả nợ. Hỏi sau bao nhiêu tháng thì anh trả hết nợ ngân hàng? (tháng cuối có thể trả dưới 10 triệu đồng).

Câu 4. (6,0 điểm)

1. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Một mặt phẳng thay đổi luôn song song với mặt phẳng chứa đa giác đáy và cắt các cạnh bên SA, SB, SC, SD lần lượt tại M, N, P, Q (không trùng các đỉnh của hình chóp $S.ABCD$). Gọi M', N', P', Q' lần lượt là hình chiếu vuông góc của M, N, P, Q lên mặt phẳng $(ABCD)$. Tính tỉ số $\frac{SM}{SA}$ để thể tích khối đa diện $MNPQ.M'N'P'Q'$ đạt giá trị lớn nhất.

2. Cho mặt cầu tâm O , bán kính $R = 1$. Từ điểm S bất kỳ trên mặt cầu kẻ ba đường thẳng cắt mặt cầu tại các điểm A, B, C (khác với S) sao cho $SA = SB = SC$ và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA} = \alpha$. Khi α thay đổi, tính thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABC$.

3. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$, D là trung điểm BC . Biết $\triangle SAD$ là tam giác đều và mặt phẳng (SAD) vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Tính khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SAB) .

Câu 5. (2,0 điểm)

Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 4$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x^3 + y^3 + z^3 + 8(xy^2 + yz^2 + zx^2)$.

----- **HẾT** -----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Giám thị không giải thích gì thêm./.

Họ và tên học sinh: Số báo danh:

Câu I. Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 4$ có đồ thị (C) .

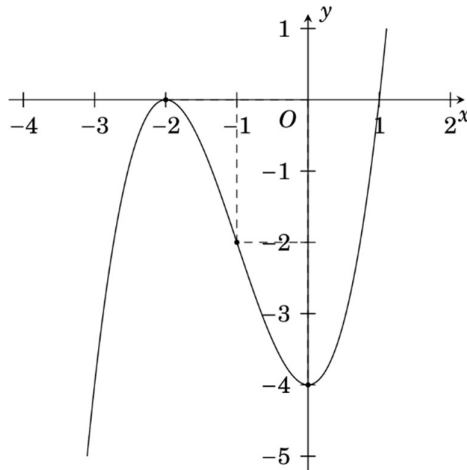
1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

Lời giải

- Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- Đạo hàm $y' = 3x^2 + 6x$.
- $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \Rightarrow y = 0 \\ x = 0 \Rightarrow y = -4 \end{cases}$
- Giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$.
- Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y			0				$+\infty$
	$-\infty$			-4			

- Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -2)$ và $(0; +\infty)$, nghịch biến trên $(-2; 0)$.
- Hàm số đạt cực đại tại $x = -2$, $y_{CD} = 0$.
- Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$, $y_{CT} = -4$.
- Ta có $y'' = 6x + 6$; $y'' = 0 \Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow y = -2$. Điểm uốn $I(-1; -2)$.
- Đồ thị



2. Tìm m để đường thẳng $y = m(x + 2)$ cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt sao cho tiếp tuyến

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng $y = m(x + 2)$ và đồ thị (C) là:

$$x^3 + 3x^2 - 4 = m(x + 2) \Leftrightarrow (x - 1)(x + 2)^2 = m(x + 2)$$

$$\Leftrightarrow (x + 2)(x^2 + x - 2 - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x^2 + x - 2 - m = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Đường thẳng $y = m(x + 2)$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 4$ tại ba điểm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác -2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9+4m > 0 \\ -m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -\frac{9}{4} \\ m \neq 0 \end{cases} \quad (*)$$

Khi đó đường thẳng $y = m(x+2)$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 4$ tại ba điểm phân biệt có hoành độ $-2, x_1, x_2$ với x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1).

$$\text{Theo định lí Viet ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 = -1 \\ x_1 \cdot x_2 = -m - 2 \end{cases}.$$

Ta có $y' = 3x^2 + 6x$. Suy ra hệ số góc của các tiếp tuyến của đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt có hoành độ $-2, x_1, x_2$ là $y'(-2) = 0, y'(x_1) = 3x_1^2 + 6x_1, y'(x_2) = 3x_2^2 + 6x_2$

Đường thẳng $y = m(x+2)$ cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt sao cho tiếp tuyến với đồ thị (C) tại ba điểm đó tạo thành tam giác vuông $\Leftrightarrow y'(x_1) \cdot y'(x_2) = -1$

$$\Leftrightarrow (3x_1^2 + 6x_1)(3x_2^2 + 6x_2) = -1 \Leftrightarrow 9(x_1 x_2)^2 + 18x_1 x_2 (x_1 + x_2) + 36x_1 x_2 = -1$$

$$\Leftrightarrow 9(m+2)^2 + 18(m+2) - 36(m+2) = -1 \Leftrightarrow 9m^2 + 18m + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{-3 \pm 2\sqrt{2}}{3} \text{ thỏa mãn điều kiện } (*).$$

$$\text{Vậy } m = \frac{-3 \pm 2\sqrt{2}}{3}.$$

Câu II:

1. Giải phương trình $\sin x(2\sqrt{3}\cos x - 3) + 2(\sin x + 1) = \sqrt{3}\cos x - \cos 2x$.

Lời giải

Ta có:

$$\text{pt} \Leftrightarrow \sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x + 2 = \sqrt{3}\cos x + \sin x$$

$$\Leftrightarrow 2\cos(2x - \frac{\pi}{3}) + 2 = 2\cos(x - \frac{\pi}{6})$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2(x - \frac{\pi}{6}) = \cos(x - \frac{\pi}{6}) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(x - \frac{\pi}{6}) = 0 \\ \cos(x - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{6} = k2\pi \\ x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + m2\pi \\ x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} + m2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + m2\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + m2\pi \end{cases} \quad (k, m \in \mathbb{Z})$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{\pi}{2} + m2\pi; x = -\frac{\pi}{6} + m2\pi \quad (k, m \in \mathbb{Z})$.

2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x} \ln\left(1 + \frac{2}{\sqrt{x}}\right) = \ln\left(1 + \frac{2}{y}\right) \\ \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{2}{xy}} = \frac{2y + 3xy}{5y + 6} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Lời giải

Điều kiện:
$$\begin{cases} x > 0 \\ 1 + \frac{2}{y} \geq 0 \\ 5y + 6 \neq 0 \end{cases}.$$

$$\sqrt{\frac{1}{x} + \frac{2}{xy}} = \frac{2y + 3xy}{5y + 6} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{x} \left(1 + \frac{2}{y}\right)} = \frac{2y + 3xy}{5y + 6} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2y + 3xy}{5y + 6} \geq 0 \\ \frac{1}{x} \left(1 + \frac{2}{y}\right) = \left(\frac{2y + 3xy}{5y + 6}\right)^2 \end{cases} \quad (1)$$

$$|(1) \Leftrightarrow (y + 2)(5y + 6)^2 = (2 + 3x)^2 xy^3 \Leftrightarrow \frac{(y + 2)(5y + 6)^2}{y^3} = (2 + 3x)^2 x$$

$$\Leftrightarrow 9\left(\frac{2}{y} + 1\right)^3 + 12\left(\frac{2}{y} + 1\right)^2 + 4\left(\frac{2}{y} + 1\right) = 9x^3 + 12x^2 + 4x \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = 9t^3 + 12t^2 + 4t$, $t \in [0; +\infty)$.

$f(t) = 27t^2 + 24t + 4 > 0 \forall t \in [0; +\infty) \Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$.

Do đó (*) có dạng $f\left(\frac{2}{y} + 1\right) = f(x) \Leftrightarrow x = \frac{2}{y} + 1$.

Thay $x = \frac{2}{y} + 1$ vào phương trình $\sqrt{x} \ln\left(1 + \frac{2}{\sqrt{x}}\right) = \ln\left(1 + \frac{2}{y}\right)$ ta được $\sqrt{x} \ln\left(1 + \frac{2}{\sqrt{x}}\right) = \ln x$.

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} \ln\left(1 + \frac{2}{\sqrt{x}}\right) - \ln x = 0 \quad (2)$$

Đặt $t = \sqrt{x}$, $t > 0$

Phương trình (2) trở thành: $t \ln\left(1 + \frac{2}{t}\right) - 2 \ln t = 0 \Leftrightarrow t [\ln(t + 2) - \ln t] - 2 \ln t = 0$

$$g(t) = t [\ln(t + 2) - \ln t] - 2 \ln t \Rightarrow g'(t) = \ln\left(1 + \frac{2}{t}\right) - \frac{2}{t} - \frac{2}{t + 2}.$$

+ Hàm số $h(a) = \ln(1 + a) - a$ liên tục trên $[0; +\infty)$

$$h'(a) = \frac{1}{1 + a} - 1 = \frac{-a}{1 + a} < 0 \text{ với } \forall a > 0.$$

Hàm số $h(a) = \ln(1 + a) - a$ nghịch biến trên $[0; +\infty)$

$$+ \text{ Với } \frac{2}{t} > 0 \Rightarrow h\left(\frac{2}{t}\right) < h(0) \Leftrightarrow \ln\left(1 + \frac{2}{t}\right) - \frac{2}{t} < 0 \Rightarrow g'(t) = \ln\left(1 + \frac{2}{t}\right) - \frac{2}{t} - \frac{2}{t + 2} < 0$$

$\Rightarrow$ Hàm số $g(t)$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

Mặt khác $g(2) = 0 \Rightarrow t = 2$ là nghiệm duy nhất của phương trình $g(t) = 0$.

$$+ t = 2 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow y = \frac{2}{3}.$$

Ta thấy $(x; y) = \left(4; \frac{2}{3}\right)$ thỏa mãn hệ phương trình.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = \left(4; \frac{2}{3}\right)$.

Câu III. (4.0 điểm):

- Gọi X là tập hợp các số tự nhiên có sáu chữ số đôi một khác nhau lấy từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Lấy ngẫu nhiên một số từ tập X . Tính xác suất để số được chọn là số chẵn và chứa hai chữ số 1 và 2 đồng thời 1 và 2 không đứng cạnh nhau.

Lời giải

Số phần tử của tập X là $7.C_7^5 = 17640 \Rightarrow n(\Omega) = C_{17640}^1 = 17640$.

Số cần tìm có dạng $\overline{abcdef}$ ($a \neq 0$) và biến cố thuận lợi là A

TH1: $f = 0$.

Có A_5^2 cách xếp 1 và 2 và A_5^3 cách xếp cho các số còn lại nên có $A_5^2.A_5^3$ số mà luôn có mặt hai chữ số 1 và 2.

Nếu 1 và 2 đứng cạnh nhau thì có 8 cách xếp và A_5^3 cách xếp cho ba vị trí còn lại, nên có $8.A_5^3$ số mà 1 và 2 đứng cạnh nhau.

Do đó trường hợp này có: $A_5^2.A_5^3 - 8.A_5^3 = 720$ số thỏa mãn đề bài.

TH2: $f = 2$.

Nếu xét cả trường hợp $a = 0$ thì có bốn cách xếp chữ số 1 không đứng cạnh chữ số 2 và có A_6^4 cách xếp cho các vị trí còn lại $\Rightarrow 4.A_6^4$ số.

Nếu chỉ xét riêng $a = 0$ thì có ba cách xếp chữ số 1 không đứng cạnh chữ số 2 và có A_5^3 cách xếp cho các vị trí còn lại $\Rightarrow 3.A_5^3$ số.

Trường hợp này có $4.A_6^4 - 3.A_5^3 = 1260$ số.

TH3: $f \in \{4; 6\} \Rightarrow 2$ cách chọn f .

Nếu xét cả $a = 0$ thì có $A_5^2.A_5^3$ số mà luôn có mặt hai chữ số 1 và 2.

Nếu 1 và 2 đứng cạnh nhau $\Rightarrow 8.A_5^3$ cách xếp, hay có $2(A_5^2.A_5^3 - 8.A_5^3) = 1440$ số.

Nếu $a = 0$ thì có $A_4^2.A_4^2$ cách xếp $\overline{bcde}$ luôn có mặt hai chữ số 1 và 2. Trong đó có $6.A_4^2$ cách xếp mà hai chữ số 1 và 2 đứng cạnh nhau.

Do đó có: $2(A_4^2.A_4^2 - 6.A_4^2) = 144$ số.

Trường hợp này có: $1440 - 144 = 1296$ số.

Cả ba trường hợp có tất cả $720 + 1260 + 1296 = 3276$ số $\Rightarrow n(A) = C_{3276}^1 = 3276$.

$$\text{Vậy } P(A) = \frac{3276}{17640} = \frac{13}{70}.$$

- Đề đủ tiền mua nhà, anh An vay ngân hàng 500 triệu theo phương thức trả góp với lãi suất 0,85% / tháng. Sau mỗi tháng, kể từ thời điểm vay, anh An trả nợ cho ngân hàng số tiền cố định là 10 triệu đồng bao gồm cả tiền lãi vay và tiền gốc. Biết lãi suất, không thay đổi trong suốt quá trình anh An trả nợ. Hỏi sau bao nhiêu tháng thì anh trả hết nợ ngân hàng? (tháng cuối có thể trả dưới 10 triệu đồng).

Lời giải

Gọi P_0 là số tiền gốc vay ban đầu, r là lãi suất/ tháng, A là số tiền anh An hoàn nợ hàng tháng.

Ta có: Số tiền nợ ngân hàng còn lại sau khi anh An hoàn nợ tháng thứ nhất:

$$P_1 = P_0(1+r) - A.$$

Số tiền nợ ngân hàng còn lại sau khi anh An hoàn nợ tháng thứ hai:

$$P_2 = P_1(1+r) - A = P_0(1+r)^2 - A(1+r) - A.$$

Số tiền nợ ngân hàng còn lại sau khi anh An hoàn nợ n tháng là:

$$P_n = P_0(1+r)^n - A[1 + (1+r) + (1+r)^2 + \dots + (1+r)^{n-1}] = P_0(1+r)^n - A \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

$$\text{Khi anh An trả hết nợ ngân hàng thì } P_n = 0 \text{ hay } P_0(1+r)^n = A \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

$$\text{Suy ra } (1+r)^n = \frac{A}{A - rP_0} \Rightarrow n = \log_{1+r} \left(\frac{A}{A - rP_0} \right)$$

Thay số ta được $n \approx 65,38$. Vì n là số nguyên nên chọn $n = 66$.

Câu IV.

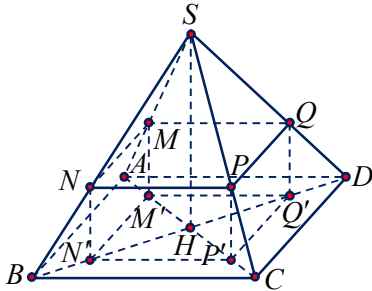
1. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Một mặt phẳng thay đổi luôn song song với mặt phẳng chứa đa giác đáy và cắt các cạnh bên SA, SB, SC, SD lần lượt tại M, N, P, Q (không trùng với các đỉnh của hình chóp $S.ABCD$). Gọi M', N', P', Q' lần lượt là hình chiếu vuông góc của M, N, P, Q lên mặt phẳng $(ABCD)$. Tính tỉ số $\frac{SM}{SA}$ để thể tích khối đa diện

$MNPQM'N'P'Q'$ đạt giá trị lớn nhất.

2. Cho mặt cầu tâm O , bán kính $R=1$. Từ điểm S bất kỳ trên mặt cầu kẻ ba đường thẳng cắt mặt cầu tại các điểm A, B, C (khác với S) sao cho $SA=SB=SC$ và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA} = \alpha$. Khi α thay đổi, tính thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABC$.

Lời giải

1.



$$\text{Đặt } \frac{SM}{SA} = k \text{ với } k \in [0;1].$$

$$\text{Xét tam giác } SAB \text{ có } MN \parallel AB \text{ nên } \frac{MN}{AB} = \frac{SM}{SA} = k \Rightarrow MN = k.AB$$

$$\text{Xét tam giác } SAD \text{ có } MQ \parallel AD \text{ nên } \frac{MQ}{AD} = \frac{SM}{SA} = k \Rightarrow MQ = k.AD$$

Kẻ đường cao SH của hình chóp. Xét tam giác SAH có:

$$MM' \parallel SH \text{ nên } \frac{MM'}{SH} = \frac{AM}{SA} = \frac{SA - SM}{SA} = 1 - \frac{SM}{SA} = 1 - k \Rightarrow MM' = (1-k).SH.$$

$$\text{Ta có } V_{MNPQ.M'N'P'Q'} = MN.MQ.MM' = AB.AD.SH.k^2.(1-k).$$

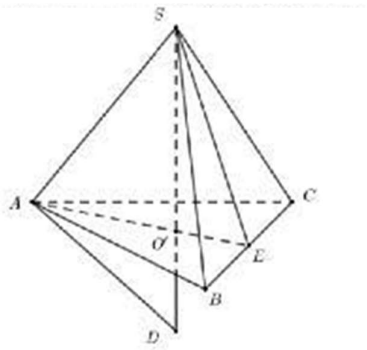
$$\text{Mà } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SH.AB.AD \Rightarrow V_{MNPQ.M'N'P'Q'} = 3.V_{S.ABCD}.k^2.(1-k).$$

Thể tích khối chóp không đổi nên $V_{MNPQ.M'N'P'Q'}$ đạt giá trị lớn nhất khi $k^2.(1-k)$ lớn nhất.

$$\text{Ta có } k^2.(1-k) = \frac{2(1-k).k.k}{2} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2-2k+k+k}{3} \right)^3 = \frac{4}{27}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $2(1-k) = k \Leftrightarrow k = \frac{2}{3}$. Vậy $\frac{SM}{SA} = \frac{2}{3}$.

2.



Tam giác ABC đều, kẻ SO' vuông góc với (ABC) thì O' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và O' thuộc SO .

Giải sử SO cắt mặt cầu tại D thì tam giác SAD vuông tại A . Gọi $SA = SB = SC = l$.

$$\text{Trong tam giác } SAD, \text{ ta có } SO' \perp AD \Rightarrow SO' = \frac{SA^2}{SD} = \frac{l^2}{2R} \quad (1)$$

Gọi E là trung điểm BC , ta có :

$$BC = 2BE = 2l \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \Rightarrow AO' = \frac{BC}{\sqrt{3}} = \frac{2l \sin \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow SO' = \sqrt{SA^2 - AO'^2} = l \sqrt{1 - \frac{4}{3} \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có

$$\frac{l^2}{2R} = l \sqrt{1 - \frac{4}{3} \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \Rightarrow l = 2R \sqrt{1 - \frac{4}{3} \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \Rightarrow S_{ABC} = 4\sqrt{3}R^2 \left(1 - \frac{4}{3} \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow SO' = 2R \left(1 - \frac{4}{3} \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SO' \cdot S_{ABC} = \frac{8\sqrt{3}}{3} R^3 \left(1 - \frac{4}{3} \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

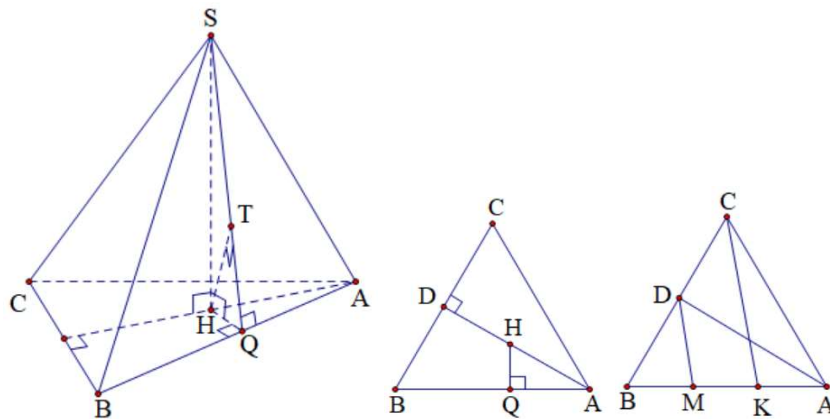
$$\text{Đặt } x = \sin^2 \frac{\alpha}{2}, \quad x \in (0;1), \text{ ta xét hàm số : } y = x \left(1 - \frac{4}{3}x\right)^2$$

Lập bảng biến thiên của hàm số trên khoảng $(0;1)$, ta thấy $\max_{(0;1)} y = y\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{9}$.

Vậy thể tích $S.ABC$ lớn nhất là $\frac{8\sqrt{3}R^3}{27}$ khi $x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \alpha = 60^\circ$.

3. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$, D là trung điểm BC . Biết $\triangle SAD$ là tam giác đều và mặt phẳng (SAD) vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Tính khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SAB) .

Lời giải



Gọi H là trung điểm $AD \Rightarrow AH \perp (ABC)$.

Trong (ABC) gọi $K = CH \cap AB$.

Gọi M là trung điểm BK .

DM là đường trung bình $\triangle BKC \Rightarrow DM \parallel KC, CK = 2DM$.

HK là đường trung bình $\triangle ADM \Rightarrow HK \parallel DM, HK = \frac{1}{2}DM$.

$$\frac{CK}{HK} = \frac{2DM}{\frac{1}{2}DM} = 4 \Rightarrow d(C, (SAB)) = 4d(H, (SAB)).$$

Kẻ $HQ \perp AB$.

$$\triangle AQH \text{ đồng dạng } \triangle ADB \Rightarrow \frac{HQ}{DB} = \frac{AH}{AB} \Rightarrow HQ = \frac{BD \cdot AH}{AB} = \frac{a \cdot a\sqrt{3}}{2a} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\triangle SAD \text{ là tam giác đều} \Rightarrow SH = \frac{AD\sqrt{3}}{2} = \frac{3a}{2}.$$

Kẻ $HT \perp SQ$.

$$\begin{cases} AB \perp HQ \\ AB \perp SH \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SHQ).$$

$$\begin{cases} HT \perp SQ \\ HT \perp AB \end{cases} \Rightarrow HT \perp (SAB).$$

$$\Rightarrow d(H, (SAB)) = HT.$$

$$\triangle SHQ \text{ vuông tại } H, \text{ đường cao } HT, \text{ ta có: } \frac{1}{HT^2} = \frac{1}{HQ^2} + \frac{1}{HS^2} = \frac{1}{\frac{3a^2}{4}} + \frac{1}{\frac{9a^2}{4}} = \frac{16}{9a^2}.$$

$$\Rightarrow HT = \frac{3a}{4} \Rightarrow d(H, (SAB)) = \frac{3a}{4}.$$

$$\Rightarrow d(C, (SAB)) = 4d(H, (SAB)) = 3a.$$

Câu V. Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $x + y + z = 4$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = x^3 + y^3 + z^3 + 8(xy^2 + yz^2 + zx^2).$$

Lời giải

Không mất tính tổng quát giả sử rằng $x \leq y \leq z$. Khi đó $2y \leq x + y + z \Rightarrow y \leq 2$. Và

$$(y-x)(y-z) \leq 0 \Rightarrow y^2 + xz \leq xy + yz \Rightarrow xy^2 + x^2z \leq x^2y + xyz \Rightarrow xy^2 + x^2z + z^2y \leq x^2y + xyz + z^2y$$

Do đó

$$xy^2 + x^2z + z^2y \leq x^2y + xyz + z^2y = y(x^2 + xz + z^2) \leq y(x^2 + 2xz + z^2) = y(x+z)^2.$$

Hay ta có

$$xy^2 + x^2z + z^2y \leq y(4-y)^2 \quad (1)$$

Tiếp tục đánh giá phần còn lại, ta có

$$x^3 + y^3 + z^3 = y^3 + (x+z)^3 - 3xz(x+z) \leq y^3 + (x+z)^3 = y^3 + (4-y)^3.$$

Vì vậy ta được

$$x^3 + y^3 + z^3 \leq y^3 + (4-y)^3 \quad (2)$$

Từ (1),(2) ta được

$$P \leq y^3 + (4-y)^3 + 8y(4-y)^2 = 8y^3 - 52y^2 + 80y + 64.$$

Ký hiệu

$$f(y) = 8y^3 - 52y^2 + 80y + 64, y \in [0; 2].$$

Ta có

$$f'(y) = 24y^2 - 104y + 80$$

$$f'(y) = 0 \Leftrightarrow 24y^2 - 104y + 80 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = \frac{10}{3} \notin [0; 2]. \end{cases}$$

$$f(0) = 64; f(1) = 100; f(2) = 80$$

Vì vậy giá trị lớn nhất của là 100 khi $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$ và các hoán vị.

.....**HẾT**.....

.