



**KỲ THI HỌC SINH GIỎI CÁC TRƯỜNG THPT CHUYÊN  
KHU VỰC DUYÊN HẢI VÀ ĐỒNG BẰNG BẮC BỘ  
LẦN THỨ XII, NĂM 2019**

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

**ĐỀ THI MÔN: TOÁN HỌC 11**

*Thời gian: 180 phút (Không kể thời gian giao đề)*

*Ngày thi: 20/4/2019*

*(Đề thi gồm 01 trang)*

**Câu 1 (4 điểm).** Cho dãy số  $(u_n)_{n=1}^{+\infty}$  bị chặn trên và thỏa mãn điều kiện

$$u_{n+2} \geq \frac{2}{5}u_{n+1} + \frac{3}{5}u_n, \quad \forall n=1, 2, 3, \dots$$

Chứng minh rằng dãy  $(u_n)$  có giới hạn hữu hạn.

**Câu 2 (4 điểm).** Cho  $\triangle ABC$  có đường tròn nội tiếp  $(I)$  tiếp xúc với  $BC, CA, AB$  ở  $D, E, F$ . Đường thẳng qua  $A$  song song  $BC$  cắt  $DE, DF$  lần lượt tại  $M, N$ . Đường tròn ngoại tiếp tam giác  $DMN$  cắt đường tròn  $(I)$  tại điểm  $L$  khác  $D$ .

a) Chứng minh  $A, K, L$  thẳng hàng.

b) Tiếp tuyến với đường tròn ngoại tiếp tam giác  $DMN$  tại  $M, N$  cắt  $EF$  tại  $U, V$ . Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác  $UVL$  tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác  $DMN$ .

**Câu 3 (4 điểm).** Tìm tất cả các đa thức  $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$  sao cho với mọi số  $n$  nguyên dương, phương trình  $P(x) = 2^n$  có nghiệm nguyên.

**Câu 4 (4 điểm).** Cho  $p$  là số nguyên tố có dạng  $12k + 11$ . Một tập con  $S$  của tập

$$M = \{1; 2; 3; \dots; p-2; p-1\}$$

được gọi là “tốt” nếu như tích của tất cả các phần tử của  $S$  không nhỏ hơn tích của tất cả các phần tử của  $M \setminus S$ . Ký hiệu  $\Delta_S$  hiệu của hai tích trên. Tìm giá trị nhỏ nhất của số dư khi chia  $\Delta_S$  cho  $p$

xét trên mọi tập con tốt của  $M$  có chứa đúng  $\frac{p-1}{2}$  phần tử.

**Câu 5 (4 điểm).** Cho đa giác lồi  $n$  đỉnh  $A_0A_1\dots A_{n-1}$  ( $n \geq 2$ ). Mỗi cạnh và đường chéo của đa giác được tô bởi một trong  $k$  màu sao cho không có hai đoạn thẳng nào cùng xuất phát từ một đỉnh cùng màu. Tìm giá trị nhỏ nhất của  $k$ .

----- HẾT -----

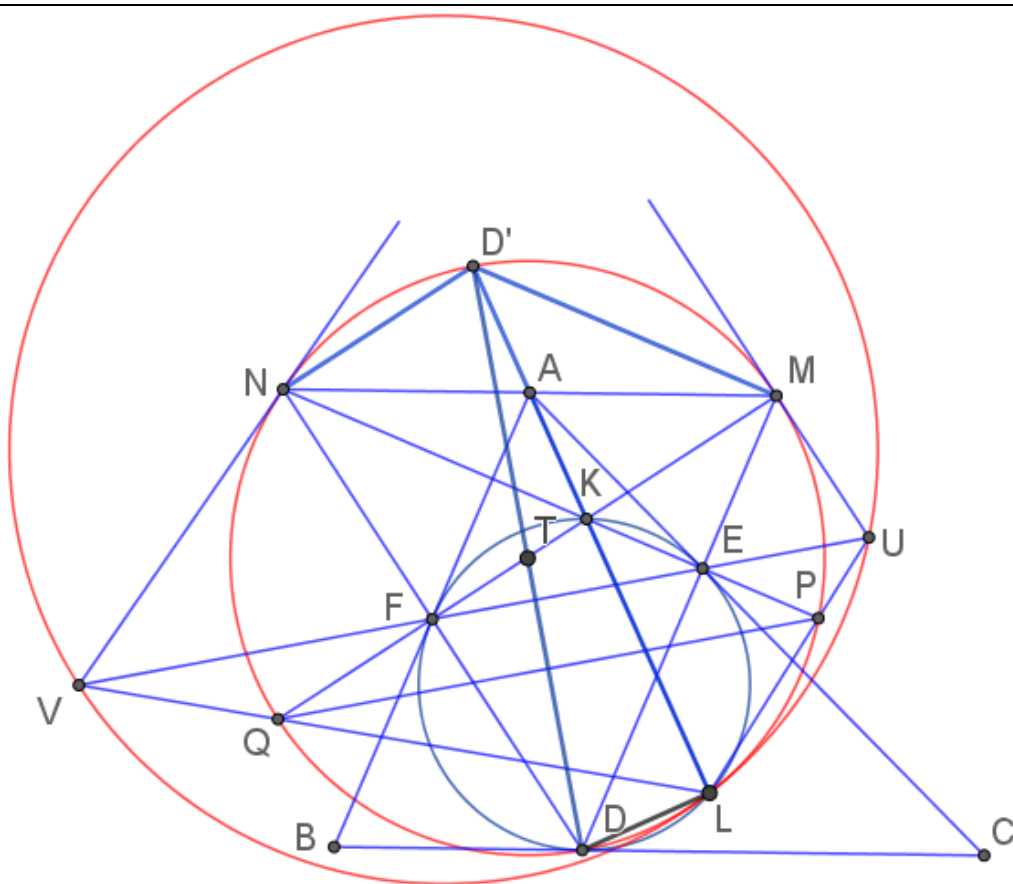
*(Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm)*

Họ và tên thí sinh: ..... Số báo danh: .....

**ĐÁP ÁN**

| Câu      | Nội dung trình bày                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | Điểm       |
|----------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>1</b> | <p><b>Đề xuất của trường THPT chuyên Biên Hòa, Hà Nam</b></p> <p>Cho dãy số <math>(u_n)_{n=1}^{+\infty}</math> bị chặn trên và thoả mãn điều kiện</p> $u_{n+2} \geq \frac{2}{5}u_{n+1} + \frac{3}{5}u_n, \quad \forall n=1, 2, 3, \dots$ <p>Chứng minh rằng dãy <math>(u_n)</math> có giới hạn hữu hạn.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | <b>4,0</b> |
|          | <p>Ta có <math>u_{n+2} \geq \frac{2}{5}u_{n+1} + \frac{3}{5}u_n \Leftrightarrow u_{n+2} + \frac{3}{5}u_{n+1} \geq u_{n+1} + \frac{3}{5}u_n, \quad \forall n=1, 2, 3, \dots</math> (1)</p> <p>Đặt <math>v_n = u_{n+1} + \frac{3}{5}u_n, \quad \forall n=1, 2, 3, \dots</math> thì từ (1) ta có <math>v_{n+1} \geq v_n, \quad \forall n=1, 2, 3, \dots</math> (2)</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | <b>1,0</b> |
|          | <p>Vì dãy số <math>(u_n)_{n=1}^{+\infty}</math> bị chặn trên nên tồn tại số M sao cho <math>u_n \leq M, \quad \forall n=1, 2, 3, \dots</math> suy ra</p> $v_n \leq M + \frac{3}{5}M = \frac{8}{5}M, \quad \forall n=1, 2, 3, \dots$ (3) <p>Từ (2) và (3) ta thấy dãy <math>(v_n)</math> không giảm và bị chặn trên. Do đó, nó là dãy hội tụ.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | <b>0,5</b> |
|          | <p>Đặt <math>\lim v_n = a</math> và <math>b = \frac{5a}{8}</math>. Ta sẽ chứng minh <math>\lim u_n = b</math>.</p> <p>Thật vậy, vì <math>\lim v_n = a</math> nên <math>\forall \varepsilon &gt; 0</math> nhỏ tùy ý, <math>\exists n_0 \in \mathbb{N}^*</math> sao cho <math> v_n - a  &lt; \frac{\varepsilon}{5}, \quad \forall n \geq n_0</math>.</p> <p>Khi đó, nhờ có đánh giá</p> $ u_{n+1} - b  - \frac{3}{5} u_n - b  < \left  (u_{n+1} - b) + \frac{3}{5}(u_n - b) \right  = \left  u_{n+1} + \frac{3}{5}u_n - \frac{8b}{5} \right  < \frac{\varepsilon}{5},$ <p>ta thu được</p> $ u_{n+1} - b  < \frac{3}{5} u_n - b  + \frac{\varepsilon}{5}, \quad \forall n \geq n_0$ | <b>1,0</b> |
|          | <p>Từ sự kiện này ta suy ra</p> $ u_{n_0+1} - b  < \frac{3}{5} u_{n_0} - b  + \frac{\varepsilon}{5};$ $ u_{n_0+2} - b  < \frac{3}{5} u_{n_0+1} - b  + \frac{\varepsilon}{5} < \left(\frac{3}{5}\right)^2  u_{n_0} - b  + \frac{3}{5} \cdot \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5};$ <p style="text-align: center;">.....</p> $ u_{n_0+k} - b  < \left(\frac{3}{5}\right)^k  u_{n_0} - b  + \frac{\varepsilon}{5} \left[ \left(\frac{3}{5}\right)^{k-1} + \left(\frac{3}{5}\right)^{k-2} + \dots + \frac{3}{5} + 1 \right].$ <p>hay</p>                                                                                                                                    | <b>1,0</b> |

|          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |            |
|----------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
|          | $\left  u_{n_0+k} - b \right  < \left( \frac{3}{5} \right)^k \left  u_{n_0} - b \right  + \frac{\varepsilon}{5} \frac{1 - \left( \frac{3}{5} \right)^k}{1 - \frac{3}{5}} < \left( \frac{3}{5} \right)^k \left  u_{n_0} - b \right  + \frac{\varepsilon}{2}.$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |            |
|          | <p>Do đó <math>\left  u_{n_0+k} - b \right  &lt; \varepsilon</math> với k đủ lớn tức là <math>\left  u_n - b \right  &lt; \varepsilon</math> với n đủ lớn và <math>\varepsilon &gt; 0</math> nhỏ tùy ý. Vậy <math>\lim u_n = b</math></p> <p>Hay dãy <math>(u_n)</math> có giới hạn hữu hạn (đpcm).</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | <b>0,5</b> |
| <b>2</b> | <p><b>Đề xuất của trường THPT chuyên Lào Cai, tỉnh Lào Cai</b></p> <p>Cho <math>\triangle ABC</math> có đường tròn nội tiếp <math>(I)</math> tiếp xúc với <math>BC, CA, AB</math> ở <math>D, E, F</math>. Đường thẳng qua <math>A</math> song song <math>BC</math> cắt <math>DE, DF</math> lần lượt tại <math>M, N</math>. Đường tròn ngoại tiếp tam giác <math>DMN</math> cắt đường tròn <math>(I)</math> tại điểm <math>L</math> khác <math>D</math>.</p> <p>a) Chứng minh <math>A, K, L</math> thẳng hàng.</p> <p>b) Tiếp tuyến với đường tròn ngoại tiếp tam giác <math>DMN</math> tại <math>M, N</math> cắt <math>EF</math> tại <math>U, V</math>. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác <math>UVL</math> tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác <math>DMN</math>.</p> | <b>4,0</b> |



a) Trước hết ta chứng minh  $K$  là trực tâm  $\triangle MDN$ . Thật vậy:

Do  $AN \parallel BC$  nên  $\widehat{ANF} = \widehat{FDB}$ .

Do  $D, E, F$  là tiếp điểm của  $(I)$  trên  $BC, CA, AB$  nên  $BD = BF$

$\Rightarrow \widehat{BDF} = \widehat{BFD} \Rightarrow \widehat{ANF} = \widehat{BFD} = \widehat{AFN} \Rightarrow \triangle ANF$  cân tại  $A \Rightarrow AN = AF$ .

Chứng minh tương tự ta có  $AM = AE$  mà  $AE = AF$  nên

$AN = AF = AE = AM \Rightarrow \triangle NEM$  vuông tại  $E$ ;  $\triangle NFM$  vuông tại  $F$

$\Rightarrow NE \perp MD; MF \perp ND$  mà  $NE \cap MF = K$  suy ra  $K$  là trực tâm  $\triangle MDN$

1,0

-Bây giờ ta chứng minh  $A, K, L$  thẳng hàng:

+ Gọi  $T$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $DMN$ . Gọi  $D'$  là điểm đối xứng của  $D$  qua  $T$ . Ta có  $ND' \parallel KM$  (vì cùng vuông góc với  $ND$ ),  $MD' \parallel KN$  (vì cùng vuông góc với  $MD$ ). Do đó  $ND'MK$  là hình bình hành. Do  $A$  là trung điểm  $MN$  nên  $K$  cũng là trung điểm  $DD'$ .

Do đó  $D', A, K$  thẳng hàng. (1)

+ Hơn nữa, tứ giác  $DFKL$  nội tiếp đường tròn đường kính  $DK$  nên  $DL$  vuông góc với  $LK$ . Mặt khác  $DD'$  là đường kính đường tròn ngoại tiếp tam giác  $DMN$  nên  $DL$  vuông góc với  $LD'$ . Do đó  $L, K, D'$  thẳng hàng. (2)

Từ (1) và (2) suy ra  $A, K, L$  thẳng hàng (đpcm).

1,0

b) Gọi  $P$  là giao của  $UL$  và  $(DMN)$  ( $P \neq L$ );  $Q$  là giao  $LV$  và  $(DMN)$  ( $Q \neq L$ ).

Do  $MU$  tiếp xúc  $(DMN)$  tại  $M$  nên  $\widehat{DMU} = \widehat{DNM}$ . Lại có  $\widehat{MEU} = \widehat{FNM}$  (do

$NMEF$  nội tiếp đường tròn đường kính  $MN$ ) nên  $\widehat{UME} = \widehat{UEM} \Rightarrow \triangle UME$  cân tại

1,0

|   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |     |
|---|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
|   | $U \Rightarrow UM = UE.$<br>Ta có $UM^2 = UP.UL \Rightarrow UP.UL = UE^2 \Rightarrow \frac{UE}{UP} = \frac{UL}{UE} \Rightarrow \Delta UEP \sim \Delta ULE$ (c.g.c)<br>$\Rightarrow \widehat{UPE} = \widehat{UEL} \Rightarrow 180^\circ - \widehat{UPE} = 180^\circ - \widehat{UEL} \Rightarrow \widehat{EPL} = \widehat{LEF}$ (3)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |     |
|   | Lại có $\widehat{LEF} = 180^\circ - \widehat{LDF}$ (do $LEFD$ nội tiếp) và $\widehat{LPN} = 180^\circ - \widehat{LDN}$ (do $LPND$ nội tiếp) nên $\widehat{LPN} = \widehat{LEF}$ (3).<br>Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{LPN} = \widehat{EPL} \Rightarrow P; E; N$ thẳng hàng.<br>Chứng minh tương tự ta có $Q; E; M$ thẳng hàng.<br>Do $MNQP$ nội tiếp nên $\widehat{NMQ} = \widehat{NPQ}$ .<br>Do $NMEF$ nội tiếp nên $\widehat{NMF} = \widehat{NEF}$ .<br>Do đó $\widehat{NEF} = \widehat{NPQ} \Rightarrow EF \parallel PQ \Rightarrow UV \parallel PQ$ .<br><b>Do đó <math>(LQP)</math> tiếp xúc với <math>(LUV)</math> tại <math>L</math> suy ra <math>(UVL)</math> tiếp xúc với <math>(DMN)</math> tại <math>L</math> (đpcm).</b> | 1,0 |
| 3 | <b>Đề xuất của trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, tỉnh Quảng Trị</b><br><br>Tìm tất cả các đa thức $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ sao cho với mọi số $n$ nguyên dương, phương trình $P(x) = 2^n$ có nghiệm nguyên.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 4,0 |
|   | Rõ ràng $\deg(P) > 0$ . Đặt $\deg(P) = m$ và $a$ là hệ số bậc cao nhất của $P$ , không mất tổng quát, coi $a > 0$ .<br>Gọi $x_n$ là nghiệm nguyên lớn nhất của phương trình $P(x) = 2^n$ .<br>Dễ thấy $\lim x_n = +\infty$ nên $\lim \frac{ax_n^m}{2^n} = 1$ , và do đó $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = \sqrt[m]{2}$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 1,0 |
|   | Hơn nữa, do $x_{n+1} - x_n$ là ước của $P(x_{n+1}) - P(x_n)$ nên $x_{n+1} - x_n = 2^{k_n}$ , với $k_n$ là số tự nhiên nào đó. Suy ra<br>$\frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 + \frac{2^{k_n}}{x_n}$ và $(\sqrt[m]{2} - 1)^m = \lim \left( \frac{2^{k_n}}{x_n} \right)^m = \lim \frac{a \cdot 2^{mk_n}}{ax_n^m} = a \cdot \lim 2^{mk_n - n}$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 1,0 |
|   | Do đó, dãy $(m \cdot k_n - n)$ phải hội tụ đến $l$ (nguyên) nào đó. Kéo theo $(\sqrt[m]{2} - 1)^m = a \cdot 2^l$ . Do đó, $m$ phải bằng 1.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 1,0 |
|   | Đặt $P(x) = ax + b$ . Từ $a(x_2 - x_1) = 2$ ta suy ra $a = \pm 1, \pm 2$ . Từ đó, ta tìm được tất cả các đa thức $P(x)$ thỏa mãn là $P(x) = a(x + k)$ với $a = \pm 1, \pm 2$ và $k$ là một số nguyên tùy ý.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 1,0 |
| 4 | <b>Đề xuất của trường THPT chuyên Bình Long, tỉnh Bình Phước</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 4,0 |

|   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |     |
|---|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
|   | <p>Cho <math>p</math> là số nguyên tố có dạng <math>12k + 11</math>. Một tập con <math>S</math> của tập</p> $M = \{1; 2; 3; \dots; p-2; p-1\}$ <p>được gọi là “tốt” nếu như tích của tất cả các phần tử của <math>S</math> không nhỏ hơn tích của tất cả các phần tử của <math>M \setminus S</math>. Ký hiệu <math>\Delta_S</math> hiệu của hai tích trên. Tìm giá trị nhỏ nhất của số dư khi chia <math>\Delta_S</math> cho <math>p</math> xét trên mọi tập con tốt của <math>M</math> có chứa đúng <math>\frac{p-1}{2}</math> phần tử.</p> |     |
|   | <p>Trước hết, xét tập con <math>S = \left\{ \frac{p+1}{2}, \frac{p+3}{2}, \dots, p-2, p-1 \right\}</math> thì rõ ràng <math>S</math> là tập con tốt và</p> $\Delta_S = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \left( \frac{p-1}{2} \right)! - \left( \frac{p-1}{2} \right)! \equiv -2 \left( \frac{p-1}{2} \right)! = 2a \pmod{p},$ <p>trong đó <math>a = -\left( \frac{p-1}{2} \right)!</math> và thỏa mãn <math>p \mid a^2 - 1</math> theo định lý Wilson.</p>                                                                                               | 1,0 |
|   | <p>Ta xét các trường hợp:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Nếu <math>a \equiv 1 \pmod{p}</math> thì <math>\Delta_S = 2 \pmod{p}</math>.</li> <li>- Nếu <math>a \equiv -1 \pmod{p}</math> thì trong tập con <math>S</math>, thay <math>\frac{p+1}{2}</math> bởi <math>\frac{p-1}{2} \equiv -\frac{p+1}{2} \pmod{p}</math> thì dễ thấy dấu của <math>\Delta_S</math> sẽ được thay đổi thành 2. Khi đó, trong cả hai trường hợp, ta đều chỉ ra được tập con tốt có <math>\Delta_S = 2 \pmod{p}</math>.</li> </ul>                   | 1,0 |
|   | <p>Ta sẽ chứng minh rằng không tồn tại <math>S</math> tốt sao cho <math>\Delta_S = 1 \pmod{p}</math>. Xét một tập con tốt <math>S</math> bất kỳ và gọi <math>a, a'</math> lần lượt là tích các phần tử của <math>S, M \setminus S</math>. Theo định lý Wilson thì <math>aa' = (p-1)! \equiv -1 \pmod{p}</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                          | 1,0 |
|   | <p>Khi đó, nếu <math>a \equiv a' \pmod{p}</math> thì <math>p \mid a^2 + 1</math>, vô lý vì ta đã biết <math>a^2 + 1</math> không có ước nguyên tố dạng <math>4k + 3</math>. Còn nếu <math>a - a' \equiv 1 \pmod{p}</math> thì <math>(2a-1)^2 \equiv -3 \pmod{p}</math>, cũng vô lý vì <math>\left( \frac{-3}{p} \right) = -1</math> do theo giả thiết thì <math>p \equiv 11 \pmod{12}</math>.<br/>Vậy giá trị nhỏ nhất cần tìm là 2.</p>                                                                                                     | 1,0 |
| 5 | <p><b>Đề xuất của trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, tỉnh Bình Định</b></p> <p>Cho đa giác lồi <math>n</math> đỉnh <math>A_0 A_1 \dots A_{n-1}</math> (<math>n \geq 2</math>). Mỗi cạnh và đường chéo của đa giác được tô bởi một trong <math>k</math> màu sao cho không có hai đoạn thẳng nào cùng xuất phát từ một đỉnh cùng màu. Tìm giá trị nhỏ nhất của <math>k</math>.</p>                                                                                                                                                                 |     |
|   | <p>Dễ thấy <math>k_{\min} \geq n-1</math>, bởi vì <math>k &lt; n-1</math> thì hiển nhiên có hai đoạn thẳng xuất phát từ một đỉnh được tô cùng một màu.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 0,5 |
|   | <p>TH1. Nếu <math>n</math> là số chẵn thì gọi các màu cần tô là <math>0, 1, \dots, n-2</math>. Ta tô màu như sau:<br/> <math>A_i A_j</math> tô màu <math>i+j \pmod{n-1}</math> (<math>0 \leq i, j \leq n-2</math>) và <math>A_i A_{n-1}</math> tô màu <math>2i \pmod{n-1}</math> (<math>0 \leq i \leq n-2</math>)</p>                                                                                                                                                                                                                        | 1,0 |
|   | <p>Cách tô màu này thỏa mãn đề bài. Thật vậy</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 0,5 |

|  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                   |
|--|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------|
|  | <p>+ Nếu <math>A_i A_j, A_i A_k</math> (<math>0 \leq i, j, k \leq n-2</math>) tô cùng màu thì <math>j \equiv k \pmod{n-1}</math>. Vô lí !</p> <p>+ Nếu <math>A_i A_{n-1}, A_i A_j</math> (<math>0 \leq i, j \leq n-2</math>) tô cùng màu thì <math>i \equiv j \pmod{n-1}</math>. Vô lí !</p> <p>+ Nếu <math>A_i A_{n-1}, A_j A_{n-1}</math> (<math>0 \leq i, j \leq n-2</math>) cùng màu thì <math>2i \equiv 2j \pmod{n-1} \Leftrightarrow i \equiv j \pmod{n-1}</math>. Vô lí !</p> <p>Vậy cách như trên thỏa mãn yêu cầu bài toán.</p> <p>Như vậy <math>k_{\min} = n-1</math>. (1)</p> |                   |
|  | <p>TH2: Nếu <math>n</math> là số lẻ thì giả sử tô với <math>n-1</math> màu là <math>0, 1, \dots, n-2</math>. Khi đó, tất cả các đoạn thẳng có màu <math>1, \dots, n-2</math> xóa hết chỉ còn lại các đoạn thẳng đều có màu 0. Suy ra <math>\deg A_i = 1</math> do đó <math>\sum_{i=0}^{n-1} \deg A_i = n:2</math> ( Vì tổng số bậc bằng 2 lần số cạnh). Điều này vô lí.</p> <p>Do đó <math>k \geq n</math>.</p>                                                                                                                                                                          | <p><b>1,0</b></p> |
|  | <p>Với <math>k = n</math> ta chỉ tô màu như sau: Gọi <math>n</math> màu cần tô là <math>0, 1, \dots, n-1</math> thì <math>A_i A_j</math> tô màu <math>i + j \pmod{n}</math>. Cách tô này thỏa mãn yêu cầu bài toán. Thật vậy <math>A_i A_j, A_i A_k</math> tô cùng màu thì <math>i \equiv j \pmod{n}</math> vô lí.</p> <p>Như vậy <math>k_{\min} = n</math>. (2)</p> <p>Từ (1) và (2) suy ra <math>k_{\min} = 2 \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil + 1</math>.</p>                                                                                                                   | <p><b>1,0</b></p> |