

MÔN TOÁN 11

Thời gian: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

Câu 1 (6,0 điểm) Giải phương trình và hệ phương trình sau:

a) $(\sqrt{3}\sin 2x + 1)(2\sin x - 1) + \sin 3x - \cos 2x - \sin x = 0$

b)
$$\begin{cases} 20\sqrt{6-x} - 17\sqrt{5-y} = 3x\sqrt{6-x} - 3y\sqrt{5-y} \\ (x^3 + 3y + 8)\sqrt{2x^2 + 5x} = 3x^3 + 5y^2 + 12x \end{cases}$$

Câu 2 (5,0 điểm)

a) Gọi S là tập tất cả các số tự nhiên có tám chữ số đôi một khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một số trong tập S. Tính xác suất để số được chọn chia hết cho 45.

b) Cho dãy số (u_n) xác định bởi
$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{(n+1)u_n}{n} + 3(n^3 + 2n^2 + 2n + 1), \quad n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Tìm số hạng tổng quát của dãy số (u_n) .

Câu 3 (5,0 điểm)

a) Cho tứ diện ABCD, trên hai cạnh AD và BC lần lượt lấy các điểm M và N sao cho $\frac{AM}{MD} = \frac{CN}{NB} = \frac{1}{2}$. Hai điểm E, F lần lượt thuộc BM và DN sao cho $EF \parallel AC$. Tính tỉ số $\frac{EF}{AC}$.

b) Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang với $AD \parallel BC$ và $AD = 2BC$. Gọi O là giao điểm của AC và BD, điểm M thay đổi nằm trong hình thang sao cho OM không song song với cạnh nào của hình thang. Qua M dựng đường thẳng song song với SO cắt các mp(SAB), (SBC), (SCD) và (SDA) lần lượt tại các điểm E, F, G và H.

Chứng minh rằng: $MF + 2(ME + MG) + 4MH = 9SO$.

Câu 4 (2,0 điểm) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC nhọn có $M(3; -1)$ là trung điểm cạnh BC, đường thẳng AC đi qua điểm $E(1; 3)$. Điểm $D(4; -2)$ đối xứng với A qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, điểm C thuộc đường thẳng d: $x + 2y - 3 = 0$ và có hoành độ dương. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.

Câu 5 (2,0 điểm) Cho ba số không âm a, b, c thỏa mãn $a + b + c \neq 0$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:
$$P = \frac{a^3 + b^3 + ac(a - c) + bc(b - c) - 5abc}{(a + b + c)^3}.$$

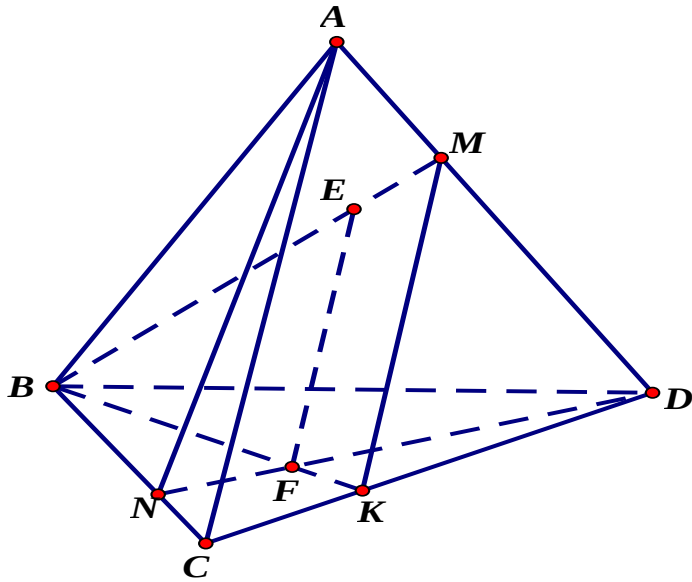
... Hết ...

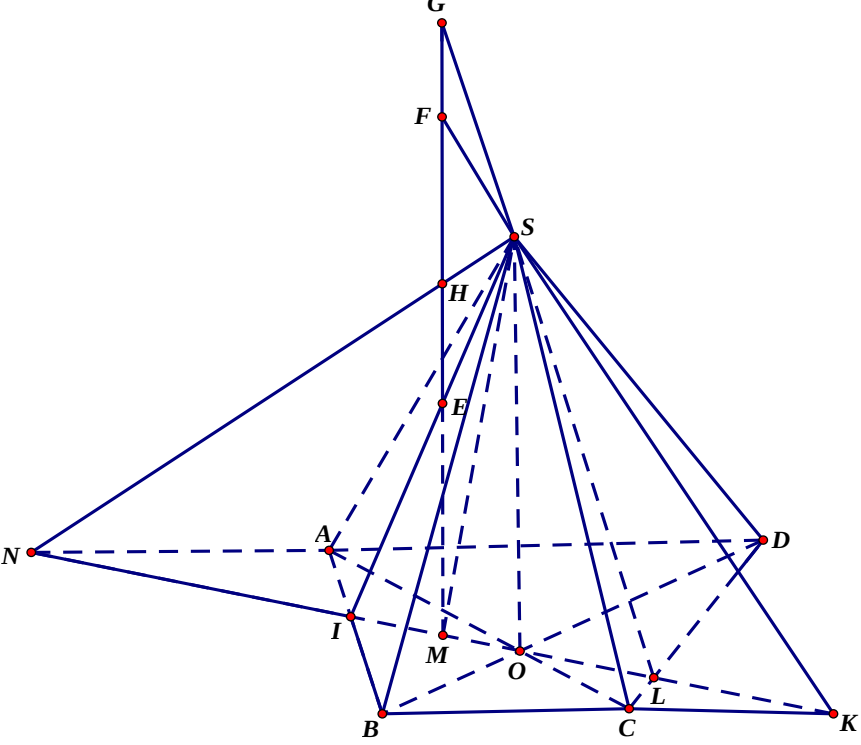
Học sinh không được sử dụng tài liệu Giám thị không giải thích gì thêm.

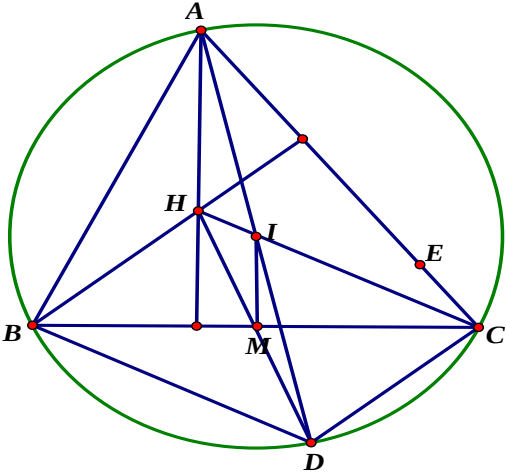
ĐÁP ÁN VÀ BIỂU ĐIỂM
ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI VÒNG 2 NĂM HỌC 2019 - 2020
(Đáp án gồm 5 trang)

Câu	Nội dung	Điểm
1a)	$(\sqrt{3}\sin 2x + 1)(2\sin x - 1) + \sin 3x - \cos 2x - \sin x = 0$	3.0
	Ta có $(1) \Leftrightarrow (\sqrt{3}\sin 2x + 1)(2\sin x - 1) + 2\cos 2x\sin x - \cos 2x = 0$ $\Leftrightarrow (\sqrt{3}\sin 2x + 1)(2\sin x - 1) + \cos 2x(2\sin x - 1) = 0$	1.0
	$\Leftrightarrow (2\sin x - 1)(\sqrt{3}\sin 2x + 1 + \cos 2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin x - 1 = 0 \\ \sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x + 1 = 0 \end{cases}$	0.5
	* $2\sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$	0.5
	$\sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x = -\frac{1}{2}$ * $\Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$	0.75
	Vậy PT đã cho có nghiệm $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$	0.25
1b)	$\begin{cases} 20\sqrt{6-x} - 17\sqrt{5-y} = 3x\sqrt{6-x} - 3y\sqrt{5-y} & (1) \\ (x^3 + 3y + 8)\sqrt{2x^2 + 5x} = 3x^3 + 5y^2 + 12x & (2) \end{cases}$	3.0
	ĐK: $\begin{cases} 6-x \geq 0 \\ 5-y \geq 0 \\ 2x^2 + 5x \geq 0 \end{cases}$ Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{6-x} \\ b = \sqrt{5-y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6-a^2 \\ y = 5-b^2 \end{cases}$ Thay vào (1) ta có $20a - 17b = 3(6-a^2)a - 3(5-b^2)b$ $\Leftrightarrow 3a^3 + 2a = 3b^3 + 2b \Leftrightarrow (a-b)[3(a^2 + ab + b^2) + 2] = 0$ $\Leftrightarrow a = b$ (Do $3(a^2 + ab + b^2) + 2 > 0$) $\sqrt{6-x} = \sqrt{5-y} \Leftrightarrow y = x-1$ thế vào (2) ta có	1.0
	$(x^3 + 3x - 3 + 8)\sqrt{2x^2 + 5x} = 3x^3 + 5(x-1)^2 + 12x$ $\Leftrightarrow (x^3 + 3x + 5)\sqrt{2x^2 + 5x} = 3x^3 + 5x^2 + 2x + 5$	0,25

	$\Leftrightarrow (x^3 + 3x + 5)(\sqrt{2x^2 + 5x - 1}) = 2x^3 + 5x^2 - x$ $\Leftrightarrow (x^3 + 3x + 5) \cdot \frac{2x^2 + 5x - 1}{\sqrt{2x^2 + 5x + 1}} = x(2x^2 + 5x - 1)$	0,5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 5x - 1 = 0 \\ x^3 + 3x + 5 = x\sqrt{2x^2 + 5x} + x \end{cases}$ $2x^2 + 5x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-5 + \sqrt{33}}{4} \Rightarrow y = \frac{-9 + \sqrt{33}}{4} \\ x = \frac{-5 - \sqrt{33}}{4} \Rightarrow y = \frac{-9 - \sqrt{33}}{4} \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$	0.5
	$x^3 + 3x + 5 = x\sqrt{2x^2 + 5x} + x \Leftrightarrow x^3 + (2x + 5) = x\sqrt{x(2x + 5)} \quad (3)$ với $x \geq 0$ Đặt $a = x\sqrt{x}$, $b = \sqrt{2x + 5}$ ta có $a^2 + b^2 = ab \Leftrightarrow a = b = 0$ vô nghiệm với $x \leq -\frac{2}{5}$ Đặt $a = x\sqrt{-x}$, $b = \sqrt{-2x - 5}$ ta có $-a^2 - b^2 = ab \Leftrightarrow a = b = 0$ vô nghiệm	0.5
Câu 2	a)	3.0
	Có $9.A_9^7 = 1632960$ số tự nhiên có tám chữ số đôi một khác nhau Phép thử Chọn ngẫu nhiên một số trong tập S nên số phần tử không gian mẫu là $n(\Omega) = 1632960$	0.5
	Một số chia hết cho 45 khi số đó chia hết cho 9 và chia hết cho 5. Ta có $0+1+2+\dots+9=45$ chia hết cho 9 nên để tạo một số có 8 chữ số đôi một khác nhau thì ta lấy 8 chữ số trong 10 chữ số 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 mà tổng 8 chữ số đó chia hết cho 9. Suy ra phải bỏ hai chữ số có tổng bằng 9. Tức là bỏ đi một trong các bộ $\{0;9\}$, $\{1;8\}$, $\{2;7\}$, $\{3;6\}$, $\{4;5\}$. Mặt khác vì số cần tìm chia hết cho 5 nên phải chứa 0 hoặc 5	0.75
	TH1. Chỉ chứa một trong hai số 0 hoặc 5 - Loại bộ $\{0;9\}$. Chữ số cuối là 5 nên có $7! = 5040$ số - Loại bộ $\{4;5\}$. Chữ số cuối là 0 nên có $7! = 5040$ số	0.75
	TH2. Có cả hai bộ $\{0;9\}$ và $\{4;5\}$. Trong TH này ta loại một trong ba bộ $\{1;8\}$, $\{2;7\}$, $\{3;6\}$. Chẳng hạn loại bộ $\{1;8\}$ thì ta lập được $7! + 6.6! = 9360$ Vậy TH này có $3.9360 = 28080$	0.5
	Vậy cả hai TH có $28080 + 2.5040 = 38160$ Xác suất cần tìm $\frac{38160}{1632960} = \frac{53}{2268}$	0.5

b)	$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{(n+1)u_n}{n} + 3(n^3 + 2n^2 + 2n + 1), \quad n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$	2.0
	Từ hệ thức truy hồi ta có $u_{n+1} = \frac{(n+1)u_n}{n} + 3(n+1)(n^2 + n + 1)$ $\Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{n+1} = \frac{u_n}{n} + 3(n^2 + n + 1)$	0.25
	$\Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{n+1} = \frac{u_n}{n} + 3n^2 + 3n + 3 \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{n+1} = \frac{u_n}{n} + (n+1)^3 - n^3 + 2$ $\Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{n+1} - (n+1)^3 = \frac{u_n}{n} - n^3 + 2$	0.5
	Xét dãy số (v_n) với $v_n = \frac{u_n}{n} - n^3$ Ta có $v_{n+1} = v_n + 2$ suy ra dãy số (v_n) là một cấp số cộng có số hạng đầu $v_1 = \frac{u_1}{1} - 1 = 1 \text{ với công sai } d = 2$	0.5
	$v_n = v_1 + (n-1).d = 1 + (n-1).2 = 2n - 1$	0.25
	Suy ra $v_n = \frac{u_n}{n} - n^3 = 2n - 1 \Rightarrow u_n = n^4 + 2n^2 - n$	0.5
Câu 3	a) 2.0 điểm	
		0.25
	Qua M kẻ đường thẳng song song với AC cắt CD tại K Ta có $AC \parallel (BMK)$ mà E thuộc (BMK) và $EF \parallel AC$ nên EF nằm trong mp(BMK), do đó F là giao điểm của DN và $(BMK) \Rightarrow F = BK \cap DN$ Trong mp(BKM), từ F kẻ đường thẳng song song với MK cắt BM tại E Ta có hai điểm E, F cần tìm	0.5

	Do $\frac{AM}{MD} = \frac{CK}{KD} = \frac{1}{2} = \frac{CN}{NB}$ nên $NK \parallel BD$ Suy ra $\frac{KF}{FB} = \frac{NK}{BD} = \frac{CK}{CD} = \frac{1}{3}$ $\Rightarrow \frac{EF}{MK} = \frac{BF}{BK} = \frac{3}{4}$ mà $\frac{MK}{AC} = \frac{2}{3}$ Do đó $\frac{EF}{AC} = \frac{EF}{MK} \cdot \frac{MK}{AC} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$	0.5
		0.75
	b) 3.0 điểm	
	 Kẻ đường thẳng OM cắt AB, BC, CD và AD lần lượt tại I, K, L và N Ta có mp (SMO) cắt các mp(SAB), (SBC), (SCD), (SDA) theo các giao tuyến SI, SK, SL, SN. Qua M kẻ đường thẳng song song với SO cắt các đường thẳng SI, SK, SL, SN lần lượt tại các điểm E, F, G và H là các điểm cần dựng	0.5
	Ta có $\frac{ME}{SO} = \frac{IM}{IO} = \frac{S_{MAB}}{S_{OAB}}$	0.5
	Tương tự $\frac{MF}{SO} = \frac{S_{MBC}}{S_{OBC}}, \frac{MG}{SO} = \frac{S_{MCD}}{S_{OCD}}, \frac{MH}{SO} = \frac{S_{MAD}}{S_{OAD}}$	0.5
	Ta có $S_{OAD} = 4S_{OBC} = 2S_{OAB} = 2S_{OCD} = 4S_1$	0.5
	Suy ra $\frac{MF}{SO} + 2\frac{ME}{SO} + 2\frac{MG}{SO} + 4\frac{MH}{SO} = \frac{S_{MBC}}{S_{OBC}} + \frac{2S_{MAB}}{S_{OAB}} + \frac{2S_{MCD}}{S_{OCD}} + \frac{4S_{MAD}}{S_{OAD}}$ $= \frac{S_{MBC}}{S_1} + \frac{2S_{MAB}}{2S_1} + \frac{2S_{MCD}}{2S_1} + \frac{4S_{MAD}}{4S_1} = \frac{S_{ABCD}}{S_1} = 9$ Vậy $MF + 2(ME + MG) + 4MH = 9SO$	1.0

Câu 4		2.0
	 Gọi H là trực tâm tam giác ABC. Ta có BH song song với CD vì cùng vuông góc với AC Tương tự CH song song với BD nên BDCH là hình bình hành. Do M là trung điểm của BC nên M cũng là trung điểm của DH. Vậy H(2; 0)	0.5
	Gọi C(3-2c; c) suy ra B(3+2c; -c-2) Ta có $\overrightarrow{BH} = (-2c-1; c+2)$, $\overrightarrow{EC} = (2-2c; c-3)$ $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{EC} = (-2c-1) \cdot (2-2c) + (c+2) \cdot (c-3) = 5c^2 - 3c - 8$	0.25
	$\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{EC}$ nên $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{EC} = 0 \Leftrightarrow 5c^2 - 3c - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c = -1 \\ c = \frac{8}{5} \end{cases}$ Do C có hoành độ dương nên C(5; -1), B(1; -1)	0.5
	PT AH : $x - 2 = 0$ và PT AC : $x + y = 4$ suy ra tọa độ A(2; 2)	0.25
Câu 5		2.0
	Đặt $x = \frac{a}{a+b+c}$, $y = \frac{b}{a+b+c}$, $z = \frac{c}{a+b+c}$ Ta có x, y, z không âm và $x + y + z = 1$ $P = x^3 + y^3 + xz(x-z) + yz(y-z) - 5xyz$ $= x^3 + y^3 + z(x^2 + y^2 - 5xy) - z^2(x+y)$	0.5
	Ta có $x^3 + y^3 \geq \frac{(x+y)^3}{4} = \frac{(1-z)^3}{4}$, $x^2 + y^2 - 5xy \geq -\frac{3}{4}(x+y)^2 = -\frac{3}{4}(1-z)^2$	0.5
	$\Rightarrow P \geq \frac{(1-z)^3}{4} - \frac{3}{4}z(1-z)^2 - z^2(1-z) = \frac{5}{4}z^2 - \frac{3}{2}z + \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{5}$	0.5
	$P = -\frac{1}{5}$ khi và chỉ khi $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x = y \\ z = \frac{3}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = \frac{1}{5} \\ z = \frac{3}{5} \end{cases}$ Vậy GTNN của P là $-\frac{1}{5}$ khi $a = b = \frac{c}{3}$	0.5
	Hết	

