

Câu 1(4,0 điểm)

1) . Cho hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ có đồ thị là (P_1) và hàm số $y = x^2 + 2x + 3$ có đồ thị là (P_2) . Giả sử đường thẳng (d): $y = m$ cắt (P_1) tại hai điểm phân biệt A, B và cắt (P_2) tại hai điểm C, D. Tìm m để $AB = \sqrt{2}CD$.

2) Giải bất phương trình $\frac{1 + 2\sqrt{x} - 2\sqrt{x^2 + 3x + 1}}{1 - 2\sqrt{x^2 - x + 1}} > 1$.

Câu 2(4,0 điểm)

1) Giải phương trình $4\cos 3x \cos x - 2\cos 4x - 4\cos x + \tan \frac{x}{2} \tan x + 2 = 0$.

2) Giải hệ phương trình.
$$\begin{cases} \sqrt{9y^2 + (2y+3)(y-x)} + 4\sqrt{xy} = 7x \\ \sqrt{7x^2 + 25y + 19} - \sqrt{x^2 - 2x - 35} = 7\sqrt{y+2} \end{cases}$$

Câu 3(4,0 điểm) 1) Cho các số thực dương x, y, z . Chứng minh rằng

$$\frac{1+x^2}{1+4\sqrt{1+y^3}+3z^2} + \frac{1+y^2}{1+4\sqrt{1+z^3}+3x^2} + \frac{1+z^2}{1+4\sqrt{1+x^3}+3y^2} \geq \frac{3}{5}.$$

2) Cho dãy số (u_n) xác định như sau
$$\begin{cases} u_1 = \frac{2}{3} \\ u_n = \frac{u_{n-1}}{2(2n-1)u_{n-1} + 1} \end{cases}, \quad \forall n \geq 2.$$
 Tính tổng của 2019 số

hạng đầu tiên của dãy số (u_n) .

Câu 4(4,0 điểm)

1) Xung quanh bờ ao của gia đình bác Nam trồng 20 cây chuối. Do không còn phù hợp bác muốn thay thế để trồng bưởi, lần đầu bác chặt ngẫu nhiên 4 cây. Tính xác suất để trong 4 cây bác chặt không có hai cây nào gần nhau.

2) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có ba góc đều nhọn và nội tiếp đường tròn tâm I. Gọi K là hình chiếu vuông góc của B trên đường thẳng AC, H là hình chiếu vuông góc của C trên đường thẳng BI. Các đường thẳng AC và KH lần lượt có phương trình là $x + y + 1 = 0$ và $x + 2y - 1 = 0$. Biết điểm B thuộc đường thẳng $y - 5 = 0$ và điểm I thuộc đường thẳng $x + 1 = 0$. Tìm tọa độ điểm C.

Câu 5(4,0 điểm)

1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = 3a$ và $AD = a\sqrt{3}$. Cạnh bên $SA = 2a$ và SA vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của đỉnh A lên các cạnh SB và SD . Tính góc giữa đường thẳng AC và mặt phẳng (AHK) .

2. Cho tứ diện $OABC$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau tại O. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên mặt phẳng (ABC) và P là điểm bất kỳ trong tam giác ABC. Chứng minh rằng
$$\frac{PA^2}{OA^2} + \frac{PB^2}{OB^2} + \frac{PC^2}{OC^2} = 2 + \frac{PH^2}{OH^2}.$$

..... HẾT

ĐÁP ÁN ĐỀ CHỌN HSG 2019 - 2020

Câu	Đáp án	Điểm
1a	Xét 2 phương trình: $x^2 - 4x + 3 - m = 0$ (1) và $x^2 + 2x + 3 - m = 0$ (2) ĐK: $\begin{cases} \Delta_1 = m + 1 > 0 \\ \Delta_2 = m - 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow m > 2$ $AB = \sqrt{2}CD \Leftrightarrow AB^2 = 2CD^2 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 2(x_3 - x_4)^2$ $\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 2[(x_3 + x_4)^2 - 4x_3x_4] \Leftrightarrow 16 - 4(3 - m) = 2[4 - 4(3 - m)] \Rightarrow m = 5$ ĐS: $m = 5$.	2.0
1b (2 điểm)	+ Điều kiện $x \geq 0$ + Ta có $2\sqrt{x^2 - x + 1} = 2\sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \geq \sqrt{3} > 1$ nên $1 - 2\sqrt{x^2 - x + 1} < 0$ Do đó bất phương trình $\Leftrightarrow 1 + 2\sqrt{x} - 2\sqrt{x^2 + 3x + 1} < 1 - 2\sqrt{x^2 - x + 1}$ $\Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{x^2 - x + 1} < \sqrt{x^2 + 3x + 1}$	0.5
	+ Nếu $x = 0$ thì bất phương trình trở thành $1 < 1$ (vô lý) + Nếu $x > 0$ thì bất phương trình $\Leftrightarrow 1 + \sqrt{x + \frac{1}{x}} - 1 < \sqrt{x + \frac{1}{x}} + 3$	0,5
	+ Đặt $x + \frac{1}{x} = t$ với $t \geq 2$, bất phương trình trở thành $1 + \sqrt{t - 1} < \sqrt{t + 3}$ $\Leftrightarrow 2\sqrt{t - 1} < 3 \Leftrightarrow t < \frac{13}{4}$	0.5
	+ Với $t < \frac{13}{4}$ thì $x + \frac{1}{x} < \frac{13}{4} \Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 4 < 0 \Leftrightarrow \frac{13 - \sqrt{105}}{8} < x < \frac{13 + \sqrt{105}}{8}$ + Vậy bất phương trình có nghiệm là $\frac{13 - \sqrt{105}}{8} < x < \frac{13 + \sqrt{105}}{8}$	0.5
2a (2 điểm)	+ Với điều kiện $\begin{cases} \cos \frac{x}{2} \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq -1 \\ \cos x \neq 0 \end{cases}$ phương trình tương đương với $4 \cos 3x \cos x - 2 \cos 4x - 4 \cos x + \frac{\sin \frac{x}{2} \sin x}{\cos \frac{x}{2} \cos x} + 2 = 0$	0.5
	$\Leftrightarrow 2(\cos 2x + \cos 4x) - 2 \cos 4x - 4 \cos x + \frac{\sin \frac{x}{2} \sin x + \cos \frac{x}{2} \cos x}{\cos \frac{x}{2} \cos x} + 1 = 0$	0,5

	$\Leftrightarrow 2 \cos 2x - 4 \cos x + \frac{1}{\cos x} + 1 = 0 \Leftrightarrow 2 \cos 2x \cos x - 4 \cos^2 x + \cos x + 1 = 0$ $\Leftrightarrow 2 \cos 2x \cos x + \cos x - (4 \cos^2 x - 1) = 0$ $\Leftrightarrow 2 \cos 2x \cos x + \cos x - (2 \cos 2x + 1) = 0$	0.5
2b (2 điểm)	$\begin{cases} 9y^2 + (2y+3)(y-x) \geq 0 \\ 7x^2 + 25y + 19 \geq 0 \\ xy \geq 0; y \geq -2; x \leq -5 \vee x \geq 7 \end{cases}$ Từ PT đầu của hệ và kết hợp với điều kiện xác định suy ra $x \geq 7, y \geq 0$. Do đó (1) $\Leftrightarrow \sqrt{9y^2 + (2y+3)(y-x)} - 3x + 4\sqrt{xy} - 4x = 0$ $\Leftrightarrow \frac{9y^2 + (2y+3)(y-x) - 9x^2}{\sqrt{9y^2 + (2y+3)(y-x)} + 3x} + \frac{4(xy - x^2)}{\sqrt{xy} + x} = 0$ $\Leftrightarrow (y-x) \left[\frac{9(x+y) + 2y+3}{\sqrt{9y^2 + (2y+3)(y-x)} + 3x} + \frac{4x}{\sqrt{xy} + x} \right] = 0$ $\Leftrightarrow x = y$ + Thế vào (2), ta được: $\sqrt{7x^2 + 25x + 19} = \sqrt{x^2 - 2x - 35} + 7\sqrt{x+2}$ $\Leftrightarrow 3x^2 - 11x - 22 = 7\sqrt{(x+2)(x+5)(x-7)}$ $\Leftrightarrow 3(x^2 - 5x - 14) + 4(x+5) = 7\sqrt{(x+5)(x^2 - 5x - 14)}$ Đặt $a = \sqrt{x^2 - 5x - 14}$; $b = \sqrt{x+5}$ ($a \geq 0, b > 0$). Khi đó phương trình trở thành $3a^2 + 4b^2 = 7ab \Leftrightarrow a = b \vee 3a = 4b$ Với $a = b \Rightarrow x = 3 + 2\sqrt{7}$ (thỏa mãn) và $x = 3 - 2\sqrt{7}$ (loại) Với $3a = 4b \Rightarrow x = \frac{61 + \sqrt{11137}}{18}$ (thỏa mãn) và $x = \frac{61 - \sqrt{11137}}{18}$ (loại) Kết luận: Hệ có 2 nghiệm của hệ là: $(3 + 2\sqrt{7}; 3 + 2\sqrt{7}) \text{ và } \left(\frac{61 + \sqrt{11137}}{18}; \frac{61 + \sqrt{11137}}{18} \right)$	0.5

3.a (2 điểm)	+ Đặt $P = \frac{1+x^2}{1+4\sqrt{1+y^3}+3z^2} + \frac{1+y^2}{1+4\sqrt{1+z^3}+3x^2} + \frac{1+z^2}{1+4\sqrt{1+x^3}+3y^2}$ và $1+x^2 = a, 1+y^2 = b, 1+z^2 = c$ với $a, b, c > 1$ + Ta có $\sqrt{1+y^3} = \sqrt{(1+y)(1-y+y^2)}$ + Theo cô-si $\sqrt{(1+y)(1-y+y^2)} \leq \frac{2+y^2}{2} \Leftrightarrow \sqrt{1+y^3} \leq \frac{2+y^2}{2}$ + Suy ra $\frac{1+x^2}{1+4\sqrt{1+y^3}+3z^2} \geq \frac{1+x^2}{2(1+y^2)+3(1+z^2)} = \frac{a}{2b+3c} \quad (1)$	0.5
	+ Hoàn toàn tương tự ta cũng có $\frac{1+y^2}{1+4\sqrt{1+z^3}+3x^2} \geq \frac{1+y^2}{2(1+z^2)+3(1+x^2)} = \frac{b}{2c+3a} \quad (2)$ $\frac{1+z^2}{1+4\sqrt{1+x^3}+3y^2} \geq \frac{1+z^2}{2(1+x^2)+3(1+y^2)} = \frac{c}{2a+3b} \quad (3)$ + Cộng các bất đẳng thức (1), (2), (3) theo vế ta được $P \geq \frac{a}{2b+3c} + \frac{b}{2c+3a} + \frac{c}{2a+3b}$	0.5
	$\Leftrightarrow P \geq \frac{a^2}{2ab+3ca} + \frac{b^2}{2bc+3ab} + \frac{c^2}{2ca+3bc}$ $\Rightarrow P \geq \frac{(a+b+c)^2}{5(ab+bc+ca)}$	0.5
	$\Rightarrow P \geq \frac{3(ab+bc+ca)}{5(ab+bc+ca)} = \frac{3}{5} \Rightarrow \text{đpcm}$	
	+ Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 2$	0.5
3.b (2 điểm)	Cho dãy số (u_n) xác định như sau $\begin{cases} u_1 = \frac{2}{3} \\ u_n = \frac{u_{n-1}}{2(2n-1)u_{n-1}+1} \end{cases}, \quad \forall n \geq 2.$ Tính tổng của 2019 số hạng đầu tiên của dãy số (u_n).	
	Ta có $\frac{1}{u_n} = \frac{2(2n-1)u_{n-1}+1}{u_{n-1}} = \frac{1}{u_{n-1}} + 4n - 2 = \frac{1}{u_{n-1}} + 2[n^2 - (n-1)^2]$ $\Rightarrow \frac{1}{u_n} - 2n^2 = \frac{1}{u_{n-1}} + 2[n^2 - (n-1)^2] - 2n^2 = \frac{1}{u_{n-1}} - 2(n-1)^2$ Tương tự ta sẽ có $\frac{1}{u_{n-1}} - 2(n-1)^2 = \frac{1}{u_{n-2}} - 2(n-2)^2 = \dots = \frac{1}{u_1} - 2$ Suy ra $\frac{1}{u_n} - 2n^2 = \frac{1}{u_1} - 2 = \frac{3}{2} - 2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{u_n} = \frac{4n^2 - 1}{2}$	0.5

	$\Rightarrow u_n = \frac{2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}$ $\Rightarrow \sum_{i=1}^{2019} u_i = \sum_{i=1}^{2019} \left(\frac{1}{2i-1} - \frac{1}{2i+1} \right)$ $= \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \dots + \left(\frac{1}{4037} - \frac{1}{4039} \right) = 1 - \frac{1}{4039} = \frac{4038}{4039}$	
4.a (2 điểm)	$+ n(\Omega) = C_{20}^4 = 4845$ Trường hợp 1: Cả 4 cây được chặt ở gần nhau có 20 cách	0.5
	+ Trường hợp 2: Trong 4 được chặt có đúng 3 cây gần nhau - Chặt 3 cây gần nhau có 20 cách - Mỗi 3 cây gần nhau có 15 cây không gần 3 cây đó. Vậy trường hợp này có: $20 \times 15 = 300$ cách	0,5
	Trường hợp 3: Trong 4 cây được chặt có đúng 2 cây gần nhau: - Chặt đúng 2 cây ở gần nhau có 20 cách - Với mỗi 2 cây gần nhau có 16 cây không ở gần hai cây này. Trong 16 cây lại có 15 cặp cây gần nhau. Chọn hai cây không gần nhau trong 16 cây có: $C_{16}^2 - 15 = 105$ Vậy trường hợp này có: $20 \cdot 105 = 2100$ cách	0.5
	+ Trường hợp 4: Trong 4 cây được chặt có đúng hai cặp cây gần nhau - Chọn một cặp cây gần nhau có 20 cách - Mỗi cách chọn một cặp cây gần nhau lại có 15 cặp cây gần nhau được chọn từ 16 cây. Vậy trường hợp này có $\frac{20 \cdot 15}{2} = 150$ cách Vậy $n(A) = 4845 - (20 + 300 + 2100 + 150) = 2275$ Suy ra: $P(A) = \frac{2275}{4845} = \frac{455}{969}$	0.5

Bài 4 b (2,0 điểm). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có ba góc đều nhọn và nội tiếp đường tròn tâm I. Gọi K là hình chiếu vuông góc của B trên đường thẳng AC, H là hình chiếu vuông góc của C trên đường thẳng BI. Các đường thẳng AC và KH lần lượt có phương trình là $x + y + 1 = 0$ và $x + 2y - 1 = 0$. Biết điểm B thuộc đường thẳng $y - 5 = 0$ và điểm I thuộc đường thẳng $x + 1 = 0$. Tìm tọa độ điểm C.

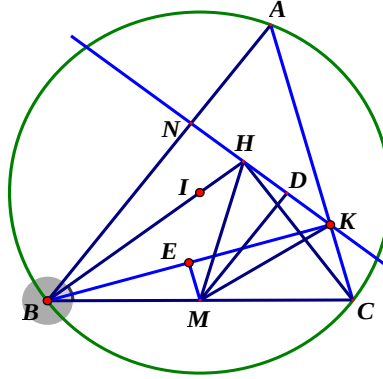
Hướng dẫn.

K là giao điểm của HK và AC nên có tọa độ là $K(-3; 2)$. Đường thẳng BK vuông góc với AC nên có phương trình: $x - y + 5 = 0$. Vì B thuộc đường thẳng $y - 5 = 0$ nên tọa độ $B(0; 5)$.

Gọi $E\left(-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right)$ là trung điểm của BK, M là trung điểm BC thì $EM \parallel AC$ nên phương trình EM là: $x + y - 2 = 0$. Suy ra tọa độ của M là: $M(m; 2 - m)$. Do $MH = MK$ nên tam giác HMK cân tại M, có MD là trung

tuyến cũng là trung trực, nên phương trình đường thẳng MD có dạng: $\begin{cases} x = m + t \\ y = 2 - m + 2t \end{cases}$, thay vào phương trình của HK ta có:

$$m + t + 2(2 - m + 2t) - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{m-3}{5}, \text{ suy ra tọa độ của } D \text{ là: } D\left(\frac{6m-3}{5}; \frac{4-3m}{5}\right).$$



Từ tọa độ của D và K suy ra tọa độ của $H\left(\frac{12m+9}{5}; \frac{-2-6m}{5}\right)$. Suy ra tọa độ véc tơ $\overrightarrow{BH}$ là:

$$\overrightarrow{BH} = \left(\frac{12m+9}{5}; \frac{-27-6m}{5}\right). \text{ Mặt khác gọi } I(-1; n), \text{ ta có } \overrightarrow{BI} = (-1; n-5) \text{ cùng hướng với } \overrightarrow{BH} \text{ nên}$$

$$(n-5)(12m+9) = 27+6m \Leftrightarrow (n-5)(4m+3) = 9+2m \Rightarrow n = \frac{22m+24}{4m+3} \quad (1).$$

Ngoài ra $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{IM} = 0$ nên ta có: $m(m+1) - (m+3)(2-m-n) = 0$

$$\Leftrightarrow 2m^2 + 2m - 6 + n(m+3) = 0 \quad (2). \text{ Thế (1) vào (2) ta được:}$$

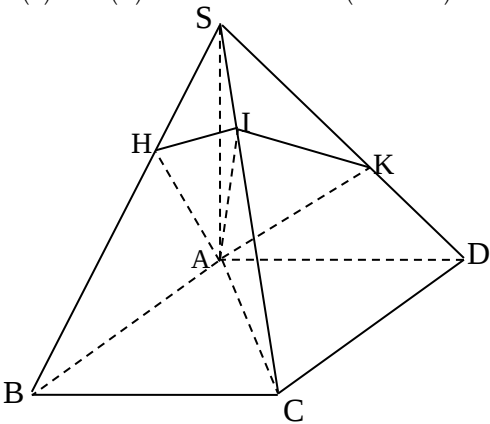
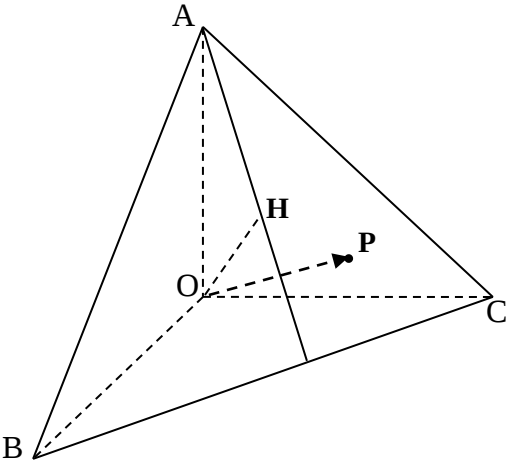
$$m^2 + m - 3 + \frac{11m+12}{4m+3}(m+3) = 0 \Rightarrow (m^2 + m - 3)(4m+3) + (11m+12)(m+3) = 0$$

$$\Rightarrow 4m^3 + 18m^2 + 36m + 27 = 0 \Leftrightarrow (2m+3)(2m^2 + 6m + 9) = 0 \Rightarrow m = -\frac{3}{2}.$$

Khi đó tọa độ $M\left(-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right) \equiv E\left(-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right) \Rightarrow C(-3; 2) \equiv K(-3; 2)$ nên tam giác ABC vuông tại C .

Câu 5.

1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = 3a$ và $AD = a\sqrt{3}$. Cạnh bên $SA = 2a$ và SA vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của đỉnh A lên các cạnh SB và SD. Tính góc giữa đường thẳng AC và mặt phẳng (AHK).	2,0
Ta có $AH \perp SB$, mà $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp BA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$ Suy ra: $AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC \quad (1)$	0,50

Tương tự: $AK \perp SC$ (2) Gọi $I = SC \cap (AHK)$, từ (1) và (2) suy ra: $SC \perp (AHIK)$ 	0,50
Do đó: $\widehat{(AC, (AHK))} = \widehat{CAI} = \widehat{ASC}$	0,25
Ta có: $AC = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 2a\sqrt{3}$	0,25
Mà: $\tan \widehat{ASC} = \frac{AC}{AS} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{ASC} = 60^\circ$	0,25
KL: $\widehat{(AC, (AHK))} = 60^\circ$.	0,25
2. Cho tứ diện $OABC$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau tại O. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên mặt phẳng (ABC) và P là điểm bất kỳ trong tam giác ABC. Chứng minh rằng $\frac{PA^2}{OA^2} + \frac{PB^2}{OB^2} + \frac{PC^2}{OC^2} = 2 + \frac{PH^2}{OH^2}$. 	2,0
Ta có: $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$ (1) Do điểm P nằm trong tam giác ABC nên $x + y + z = 1$.	0,25

Từ (1) ta có: $x(\overrightarrow{OA})^2 = \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA} = \frac{OP^2 + OA^2 - PA^2}{2} \Rightarrow x = \frac{OP^2 + OA^2 - PA^2}{2OA^2}$ Suy ra: $x = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{OP^2}{OA^2} - \frac{PA^2}{OA^2} \right)$	0,50
Tương tự: $y = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{OP^2}{OB^2} - \frac{PB^2}{OB^2} \right), z = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{OP^2}{OC^2} - \frac{PC^2}{OC^2} \right)$	0,25
Mà ta có: $x + y + z = 1$ $\Rightarrow \frac{1}{2} \left(1 + \frac{OP^2}{OA^2} - \frac{PA^2}{OA^2} \right) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{OP^2}{OB^2} - \frac{PB^2}{OB^2} \right) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{OP^2}{OC^2} - \frac{PC^2}{OC^2} \right) = 1$ $\Leftrightarrow 3 + \frac{OP^2}{OA^2} + \frac{OP^2}{OB^2} + \frac{OP^2}{OC^2} = 2 + \frac{PA^2}{OA^2} + \frac{PB^2}{OB^2} + \frac{PC^2}{OC^2}$ $\Leftrightarrow 1 + OP^2 \left(\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} \right) = \frac{PA^2}{OA^2} + \frac{PB^2}{OB^2} + \frac{PC^2}{OC^2}$	0,50
Mặt khác ta có: $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{OH^2}$ và $OP^2 = OH^2 + PH^2$	0,25
Do đó: $\frac{PA^2}{OA^2} + \frac{PB^2}{OB^2} + \frac{PC^2}{OC^2} = 1 + \frac{OP^2}{OH^2} = 1 + \frac{OH^2 + PH^2}{OH^2} = 2 + \frac{PH^2}{OH^2}$ KL: $\frac{PA^2}{OA^2} + \frac{PB^2}{OB^2} + \frac{PC^2}{OC^2} = 2 + \frac{PH^2}{OH^2}$ (đpcm).	0,25