SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KIÊN GIANG	KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI VÒNG TỈNH THPT NĂM HỌC 2020-2021

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Môn: **TOÁN**
Thời gian: **180** phút (*không kể thời gian giao đề*)
Ngày thi: **18/3/2021**
(Đề thi có 01 trang, gồm 04 bài)

Bài 1. (6,0 điểm)

Câu 1. (4,0 điểm) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2y - x = \sqrt{2\left(x-1\right)^2 + 2} \\ \dfrac{1}{x-1} = 2\left(y-x\right) + 1 \end{cases}$ trên tập số thực.

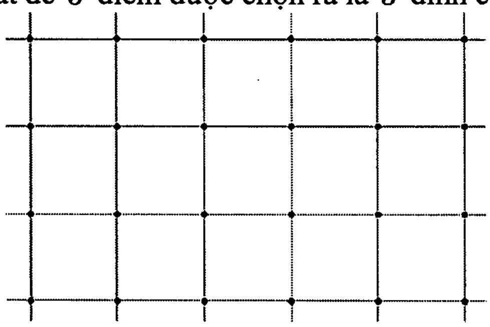
Câu 2. (2,0 điểm) Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{x}{y^2+z^2} + \dfrac{y}{z^2+x^2} + \dfrac{z}{x^2+y^2}$.

Bài 2. (5,0 điểm)

Câu 1. (1,5 điểm) Giải phương trình $\sqrt{3}\sin 2x + 1 - \cos 2x = \sqrt{3}\sin x + 3\cos x$ trên tập số thực.

Câu 2. (1,5 điểm) Tìm số hạng chứa x^4 trong khai triển $\left(1 - x - x^2\right)^{10}$.

Câu 3. (2,0 điểm) Cho lưới ô vuông 4×6 gồm 24 điểm như hình vẽ. Chọn ngẫu nhiên 3 điểm từ 24 điểm trên lưới. Tính xác suất để 3 điểm được chọn ra là 3 đỉnh của một tam giác.



Bài 3. (4,0 điểm)

Câu 1. (2,0 điểm) Cho dãy số $\left(u_n\right)$ thỏa mãn $u_1 = 3, u_{n+1} = \dfrac{u_n + 8}{2u_n + 1}, n \in \mathbb{N}^*$.

Tìm số hạng tổng quát u_n.

Câu 2. (2,0 điểm) Tìm tất cả các hàm số $f\left(x\right)$ thỏa $f\left(xf\left(y\right) + 2x\right) = xy + 3f\left(x\right) - 2; \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Bài 4. (5,0 điểm)

Câu 1. (3,0 điểm) Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn $\left(C\right): \left(x-1\right)^2 + \left(y+2\right)^2 = 4$ và đường thẳng $d: 2x - 3y - 8 = 0$. Gọi A, B là hai giao điểm của đường thẳng d và đường tròn $\left(C\right)$, M là điểm di động trên đường tròn (khác A, B). Tìm tọa độ M để diện tích của tam giác ABM là lớn nhất.

Câu 2. (2,0 điểm) Cho đường tròn $\left(O\right)$ đường kính AB. Trên cung $\overset{\frown}{AB}$ lấy điểm M (M khác A và B) và I là điểm thuộc đoạn OA (I khác A và O). Trên nửa mặt phẳng bờ AB có chứa điểm M, kẻ các tia tiếp tuyến Ax, By với đường tròn $\left(O\right)$. Qua M kẻ đường thẳng vuông góc với IM, đường thẳng này cắt Ax, By lần lượt tại C và D. Gọi E là giao điểm của AM với IC, F là giao điểm của BM với ID. Chứng minh rằng: $ME.MB = MA.MF$.

--------------------**HẾT**--------------------

Ghi chú:

- *Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.*
- *Giám thị không giải thích gì thêm.*

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KIÊN GIANG ------------- **HƯỚNG DẪN CHẤM** **ĐỀ THI CHÍNH THỨC**	**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI VÒNG TỈNH THPT** **NĂM HỌC 2020-2021** ----------------------------- Môn: **TOÁN** Thời gian: **180** phút *(không kể thời gian giao đề)* Ngày thi: **18/3/2021** *(Hướng dẫn chấm có 07 trang)*

A. HƯỚNG DẪN CHẤM

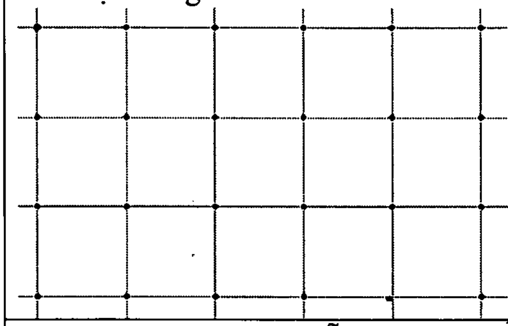
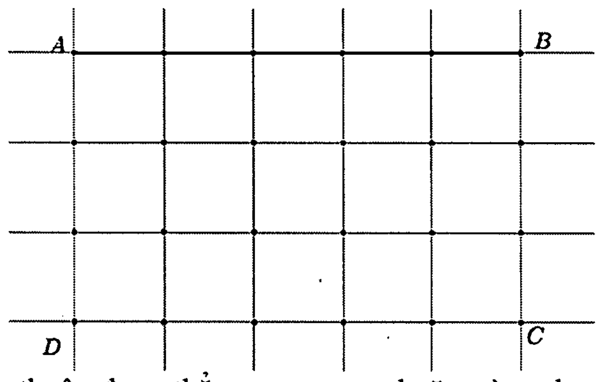
Ngoài các kiến thức trong chương trình Chuẩn và Nâng cao, nếu học sinh có sử dụng các kiến thức phổ biến trong tài liệu chuyên Toán của Nhà xuất bản Giáo dục, các chuyên đề bồi dưỡng học sinh giỏi... thì giám khảo xem xét cho điểm tương ứng nếu cách giải logic và đúng.

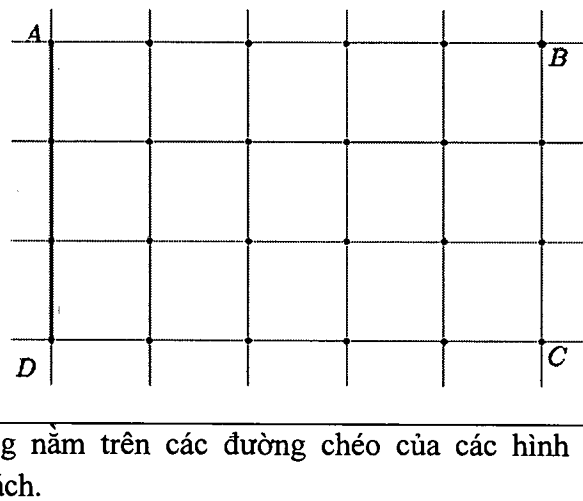
B. ĐÁP ÁN – BIỂU ĐIỂM

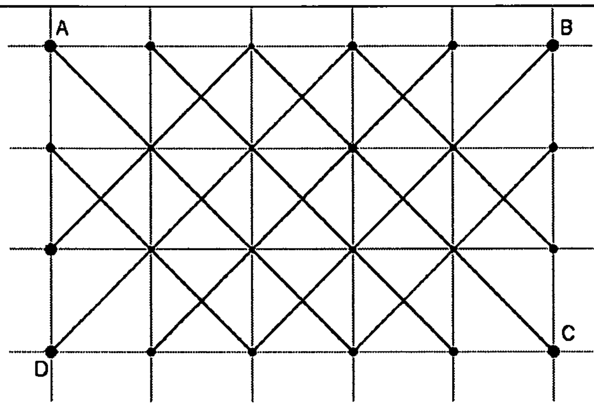
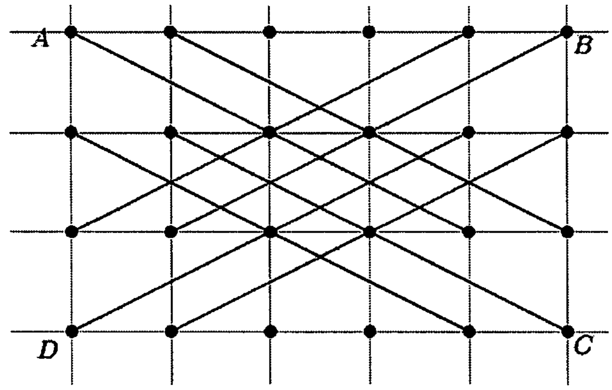
Bài	Câu	Nội dung	Biểu điểm
Bài 1 (6,0 điểm)	**Câu 1 (4,0 điểm)**	Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2y-x=\sqrt{2(x-1)^2+2} \\ \dfrac{1}{x-1}=2(y-x)+1 \end{cases}$	
		Điều kiện $\begin{cases} 2y-x>0 \\ x\neq 1 \end{cases}$	**0.5**
		Hệ phương trình đã cho tương đương với $\begin{cases} 2y-x=\sqrt{2(x-1)^2+2} \\ \dfrac{1}{x-1}=(2y-x)-(x-1) \end{cases}$	**0.5**
		Đăt $\begin{cases} a=2y-x \\ b=x-1 \end{cases}$ khi đó hệ phương trình trở thành $\begin{cases} a=\sqrt{2b^2+2} \\ \dfrac{1}{b}=a-b \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} a=\sqrt{2b^2+2} \\ a=b+\dfrac{1}{b} \end{cases}$	**0.5**
		$\Leftrightarrow \begin{cases} b+\dfrac{1}{b}=\sqrt{2b^2+2} \\ a=b+\dfrac{1}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2+1=b\sqrt{2b^2+2} \\ a=b+\dfrac{1}{b} \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{b^2+1}\left(\sqrt{b^2+1}-b\sqrt{2}\right)=0 \\ a=b+\dfrac{1}{b} \end{cases}$	**0.5**

		$\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{b^2+1}-b\sqrt{2}=0\\ a=b+\dfrac{1}{b}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{b^2+1}=b\sqrt{2}\\ a=b+\dfrac{1}{b}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b>0\Rightarrow a\geq 2\\ b^2+1=2b^2\\ a=b+\dfrac{1}{b}\end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases}a\geq 2, b>0\\ b^2=1\\ a=b+\dfrac{1}{b}\end{cases}$	0.5
		$\Leftrightarrow \begin{cases}a=2\\ b=1\end{cases}$ (thỏa mãn)	0.5
		Nên ta được $\begin{cases}2y-x=2\\ x-1=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\ y=2\end{cases}$	0.5
		Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(2;2)$.	0.5
	Câu 2. (2,0 điểm)	Cho x,y,z là các số dương thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{x}{y^2+z^2}+\dfrac{y}{z^2+x^2}+\dfrac{z}{x^2+y^2}$.	
		Vì $x>0, y>0, z>0$ và $x^2+y^2+z^2=1$ nên $0<x<1$, $0<y<1; 0<z<1$.	0.25
		Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho bộ ba $2x^2, 1-x^2, 1-x^2$, ta có $2x^2+\left(1-x^2\right)+\left(1-x^2\right)\geq 3\sqrt[3]{2x^2\left(1-x^2\right)^2}$ $\Rightarrow 2\geq 3\sqrt[3]{2x^2\left(1-x^2\right)^2}$ $\Rightarrow x^2\left(1-x^2\right)^2\leq \dfrac{4}{27}$ $\Rightarrow x\left(1-x^2\right)\leq \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$ $\Rightarrow \dfrac{3\sqrt{3}}{2}x\leq \dfrac{1}{1-x^2} \Rightarrow \dfrac{3\sqrt{3}}{2}x^2\leq \dfrac{x}{1-x^2} \Rightarrow \dfrac{3\sqrt{3}}{2}x^2\leq \dfrac{x}{y^2+z^2}$ $\Rightarrow \dfrac{x}{y^2+z^2}\geq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}x^2$ (1)	0.5

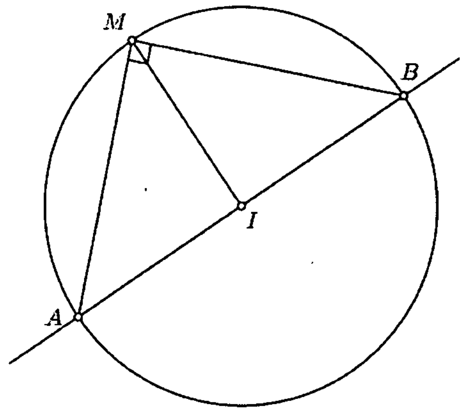
		Tương tự $\frac{y}{z^2+x^2} \ge \frac{3\sqrt{3}}{2}y^2 \quad (2)$ $\frac{z}{x^2+y^2} \ge \frac{3\sqrt{3}}{2}z^2 \quad (3)$	0.5
		Cộng từng vế $(1),(2),(3)$ và chú ý $x^2+y^2+z^2=1$ ta được $P=\frac{x}{y^2+z^2}+\frac{y}{z^2+x^2}+\frac{z}{x^2+y^2} \ge \frac{3\sqrt{3}}{2}$	0.5
Bài 2. **(5,0 điểm)**		Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z=\frac{\sqrt{3}}{3}$ nên GTNN của P là $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.	0.25
	Câu 1. **(1.5 điểm)**	Giải phương trình $\sqrt{3}\sin 2x+1-\cos 2x=\sqrt{3}\sin x+3\cos x$ trên tập số thực.	
		$\sqrt{3}\sin 2x-\sqrt{3}\sin x=\cos 2x+3\cos x-1$ $\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\sin x\cos x-\sqrt{3}\sin x=2\cos^2 x+3\cos x-2$ $\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin x(2\cos x-1)=2\cos^2 x-\cos x+4\cos x-2$ $\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin x(2\cos x-1)=\cos x(2\cos x-1)+2(2\cos x-1)$ $\Leftrightarrow (2\cos x-1)\left(\sqrt{3}\sin x-\cos x-2\right)=0$	0.5
		$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2\cos x-1=0\\ \sqrt{3}\sin x-\cos x-2=0\end{array}\right.$ $+/\ 2\cos x-1=0 \Leftrightarrow \cos x=\frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi, k\in Z$	0.5
		$+/\ \sqrt{3}\sin x-\cos x-2=0 \Leftrightarrow \sin(x-\frac{\pi}{6})=1$ $\Leftrightarrow x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi, k\in Z$	0.5
	Câu 2. **(1.5 điểm)**	Tìm số hạng chứa x^4 trong khai triển $\left(1-x-x^2\right)^{10}$.	
		Ta có $\left(1-x-x^2\right)^{10}=\left((1-x)-x^2\right)^{10}$. $=C_{10}^0(1-x)^{10}-C_{10}^1(1-x)^9x^2+C_{10}^2(1-x)^8x^4+....+(-1)^{10}C_{10}^{10}x^{20}$	0.5
		Do đó số hạng chứa x^4 là $A=C_{10}^0C_{10}^4x^4-C_{10}^1C_9^2x^2.x^2+C_{10}^2C_8^0x^4=-105x^4$.	1.0

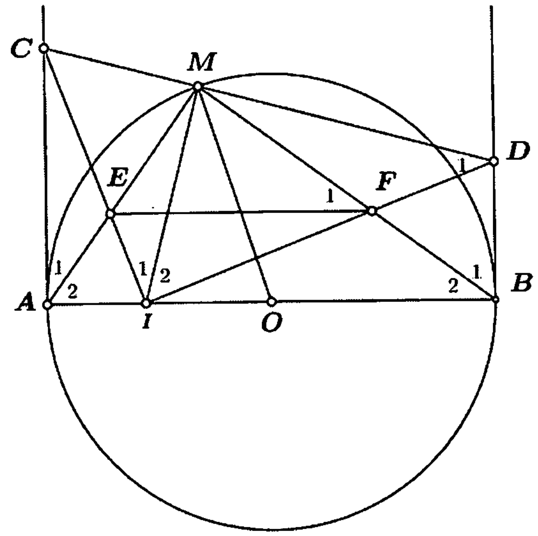
<table>
<tr><td rowspan="4"></td><td rowspan="4">Câu 3.
(2,0 điểm)</td><td>Cho lưới ô vuông 4×6 gồm 24 điểm như hình vẽ. Chọn ngẫu nhiên 3 điểm từ 24 điểm trên lưới,Tính xác suất để 3 điểm được chọn ra là 3 đỉnh của một tam giác.
</td><td></td></tr>
<tr><td>Xét phép thử: “Chọn ngẫu nhiên 3 điểm từ 24 điểm trên lưới”.
Ta được số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega)=C_{24}^{3}=2024$.
Gọi A là biến cố: “3 điểm chọn ra là 3 đỉnh của một tam giác”.
Các trường hợp 3 điểm được chọn thẳng hàng:</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>Chọn 3 điểm cùng thuộc đoạn thẳng song song hoặc trùng đoạn AB có $4.C_{6}^{3}=80$ cách.


Chọn 3 điểm cùng thuộc đoạn thẳng song song hoặc trùng đoạn AD có $6.C_{4}^{3}=24$ cách.

</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td>Chọn 3 điểm cùng nằm trên các đường chéo của các hình vuông có $4.C_{3}^{3}+6.C_{4}^{3}=28$ cách.</td><td>0.5</td></tr>
</table>

			
		Chọn 3 điểm cùng nằm trên các đường chéo của các hình chữ nhật tạo bởi hai hình vuông liền kề có $8.C_3^3 = 8$ cách.  Vậy xác suất của biến cố A là $P(A)=\dfrac{2024-80-24-8}{2024}=\dfrac{88}{95}$.	0.5
Bài 3 (4,0 điểm)	**Câu 1 (2,0 điểm)**	Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $u_1 = 3, u_{n+1} = \dfrac{u_n + 8}{2u_n + 1}, n \in \mathbb{N}^*$. Tìm số hạng tổng quát u_n.	
		Với $u_n = \dfrac{u_{n-1}+8}{2u_{n-1}+1}$ Ta có: $u_n - 2 = \dfrac{u_{n-1}+8}{2u_{n-1}+1} - 2 \Leftrightarrow u_n - 2 = \dfrac{-3u_{n-1}+6}{2u_{n-1}+1}$, $u_n + 2 = \dfrac{u_{n-1}+8}{2u_{n-1}+1} + 2 \Leftrightarrow u_n + 2 = \dfrac{5u_{n-1}+10}{2u_{n-1}+1}$,	0,5
		Suy ra, $\dfrac{u_n-2}{u_n+2} = \dfrac{-3u_{n-1}+6}{5u_{n-1}+10} = \dfrac{-3}{5}\cdot\dfrac{u_{n-1}-2}{u_{n-1}+2} = \left(\dfrac{-3}{5}\right)^2\cdot\dfrac{u_{n-2}-2}{u_{n-2}+2}$ $= \dots = \left(\dfrac{-3}{5}\right)^{n-1}\cdot\dfrac{u_1-2}{u_1+2} = \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{-3}{5}\right)^{n-1}$	0,5
		Từ đó, $u_n - 2 = \dfrac{1}{5}\cdot\left(\dfrac{-3}{5}\right)^{n-1}(u_n+2) \Leftrightarrow u_n = \dfrac{10+2\left(\dfrac{-3}{5}\right)^{n-1}}{5-\left(\dfrac{-3}{5}\right)^{n-1}}$.	0,5
		Thử lại ta thấy đúng.	0,25

		Vậy, số hạng tổng quát của dãy $\left(u_n\right)$ là $u_n = \dfrac{10+2\left(\frac{-3}{5}\right)^{n-1}}{5-\left(\frac{-3}{5}\right)^{n-1}}$.	0,25
	Câu 2 (2,0 điểm)	Tìm tất cả các hàm số $f\left(x\right)$ thỏa $f\left(xf\left(y\right)+2x\right) = xy+3f\left(x\right)-2; \forall x,y \in \mathbb{R}$.	
		Cho $x=0$, ta được $f\left(0\right)=1$ Cho $x=1$, ta được $f\left(f\left(y\right)+2\right) = y+3f\left(1\right)-2\left(1\right)$	0,25
		Đặt $y=-3f\left(1\right)$, suy ra $\left(1\right) \Leftrightarrow f\left(f\left(-3f\left(1\right)\right)+2\right)=-2\left(2\right)$	0,25
		Đặt $a=f\left(-3f\left(1\right)\right)+2$, suy ra $\left(2\right) \Leftrightarrow f\left(a\right)+2=0 \Leftrightarrow xf\left(a\right)+2x=0 \Leftrightarrow f\left(xf\left(a\right)+2x\right)=f\left(0\right)$ $\Leftrightarrow f\left(xf\left(a\right)+2x\right)=1 \Leftrightarrow ax+3f\left(x\right)-2=1 \Leftrightarrow f\left(x\right)=-\dfrac{a}{3}x+1$	0,50
		Đặt $c=-\dfrac{a}{3}$, ta được $f\left(x\right)=cx+1$	0,25
		Kết hợp $f\left(x\right)=cx+1$ và $f\left(xf\left(y\right)+2x\right)=xy+3f\left(x\right)-2$, ta được: $c\left(xf\left(y\right)+2x\right)+1=xy+3\left(cx+1\right)-2$ $\Leftrightarrow cxf\left(y\right)+2cx+1=xy+3cx+1 \Leftrightarrow cx\left(cy+1\right)+2cx=xy+3cx$ $\Leftrightarrow c^2xy=xy \Leftrightarrow c=\pm 1$. Ta có các hàm số $f\left(x\right)$ là $f\left(x\right)=x+1$ và $f\left(x\right)=-x+1$	0,50
		Thử lại ta thấy đúng. Vậy có hai hàm số thỏa yêu cầu bài toán là $f\left(x\right)=x+1$ và $f\left(x\right)=-x+1$.	0,25
Bài 4 (5,0 điểm)	**Câu 1 (3,0 điểm)**	Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn $\left(C\right):\left(x-1\right)^2+\left(y+2\right)^2=4$ và đường thẳng $d: 2x-3y-8=0$. Gọi A,B là hai giao điểm của đường thẳng d và đường tròn $\left(C\right)$, M là điểm di động trên đường tròn (khác A,B). Tìm tọa độ M để diện tích của tam giác ABM là lớn nhất.	

			0,25
		Tọa độ tâm của đường tròn (C) là $I(1;-2)$. Vì tọa độ I thỏa mãn phương trình đường thẳng d nên đường thẳng d qua tâm của đường tròn (C).	0,25
		Do đó, tam giác ABM vuông tại M. $S_{\Delta ABM} = \frac{1}{2}MA.MB$, mà $MA^2 + MB^2 \geq 2MA.MB \Leftrightarrow \frac{MA^2+MB^2}{4} \geq \frac{MA.MB}{2}$. Do đó, diện tích lớn nhất tam giác ABM là $\frac{MA^2+MB^2}{4}$ điều này xảy ra khi $MA = MB$	0,50
		Khi đó M thuộc đường trung trực của đoạn thẳng AB. Gọi đường thẳng qua I và vuông góc với đường thẳng d có dạng $\Delta : 3x + 2y + d = 0$. Vì $I \in \Delta$ nên $3.1 + 2(-2) + d = 0 \Leftrightarrow d = 1$. Vậy $\Delta : 3x + 2y + 1 = 0\ (1)$	0,50
		Gọi M là giao điểm của đường thẳng Δ và đường tròn (C), tọa độ M là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 3x+2y+1=0 \\ (x-1)^2+(y+2)^2=4 \end{cases}$	0,50
		$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{13+4\sqrt{13}}{13} \\ y = -\frac{26+6\sqrt{13}}{13} \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{13-4\sqrt{13}}{13} \\ y = \frac{-26+6\sqrt{13}}{13} \end{cases}$.	0,50
		Vậy có hai điểm M thỏa yêu cầu bài toán. $M_1\left(\frac{13+4\sqrt{13}}{13}; -\frac{26+6\sqrt{13}}{13}\right); M_2\left(\frac{13-4\sqrt{13}}{13}; \frac{-26+6\sqrt{13}}{13}\right)$.	0,50
	Câu 2 (2,0 điểm)	Cho đường tròn (O) đường kính AB. Gọi M là điểm thuộc cung AB (M khác A và B) và I là điểm thuộc đoạn OA (I khác A và O) Trên nửa mặt phẳng bờ AB có chứa điểm M, kẻ các tia tiếp tuyến Ax, By với đường tròn (O). Qua M kẻ đường thẳng vuông góc với IM, đường thẳng này cắt Ax, By lần lượt tại C và D. Gọi E là giao điểm của AM với IC, F là giao điểm của BM với ID. Chứng minh rằng: $ME.MB = MA.MF$	

			**0,25**
		Chứng minh được các tứ giác $ACMI$, $BDMI$ nội tiếp	**0,25**
		Do đó: $\left.\begin{matrix}\widehat{I_1}=\widehat{A_1}\\ \widehat{I_2}=\widehat{B_1}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \widehat{I_1}+\widehat{I_2}=\widehat{A_1}+\widehat{B_1}$. Mà $\widehat{A_2}+\widehat{B_2}=90^o$ và $\widehat{A_1}+\widehat{A_2}+\widehat{B_1}+\widehat{B_2}=180^o \Rightarrow \widehat{I_1}+\widehat{I_2}=90^o$. $\Rightarrow \widehat{EIF}=\widehat{EMF}=90^o$. Tứ giác $MEIF$ nội tiếp đường tròn.	**0,50**
		Mặt khác, Vì tứ giác $MEIF$ nội tiếp nên $\widehat{I_1}=\widehat{F_1}$; tứ giác $ACMI$ nội tiếp nên $\widehat{I_1}=\widehat{A_1}$ Trong (O) thì $\widehat{B_2}=\widehat{A_1}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung $\overset{\frown}{AM}$) Do đó, $\widehat{B_2}=\widehat{F_1}$.	**0,50**
		Xét hai tam giác ΔMEF; ΔMAB , ta có : $\widehat{B_2}=\widehat{F_1}$ (chứng minh trên); $\widehat{M}$ chung. Suy ra ΔMEF đồng dạng ΔMAB (góc – góc) Suy ra, $\dfrac{ME}{MA}=\dfrac{MF}{MB} \Leftrightarrow ME.MB = MA.MF$ (đpcm).	**0,50**

--------------------HẾT--------------------