

Câu I (6,0 điểm).

1. Cho hàm số $y = x^3 + mx^2 + 1$ có đồ thị (C_m) . Tìm các giá trị của tham số m để đường thẳng $(d): y = 1 - x$ cắt đồ thị (C_m) tại 3 điểm phân biệt sao cho tiếp tuyến của đồ thị (C_m) tại hai trong ba điểm đó vuông góc với nhau.

2. Cho hàm số $y = \frac{(x+1)^2}{x+2}$ có đồ thị (C) . Gọi $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ là các điểm cực trị của (C)

với $x_1 < x_2$. Tìm điểm M trên trục tung sao cho $T = 2MA^2 - MB^2 + |2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu II (4,0 điểm).

1. Giải phương trình: $\frac{1}{2} \log_{1+\sqrt{3}}(2x+2) = \log_{3+2\sqrt{3}}(2x+1)$.

2. Cho các số thực $a, b, c \in [2; 8]$ và thỏa mãn điều kiện $abc = 64$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \log_2^2 a + \log_2^2 b + \log_2^2 c$.

Câu III (5,0 điểm).

1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thang cân với $AD = 2a, AB = BC = CD = a$, cạnh SA vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm của SB và N là điểm thuộc đoạn SD sao cho

$NS = 2ND$. Biết khoảng cách từ S đến mặt phẳng (AMN) bằng $\frac{6a\sqrt{43}}{43}$, tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$ theo a .

2. Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Đường phân giác của góc $\widehat{ABC}$ cắt AC tại I . Trên nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AC , vẽ nửa đường tròn tâm I tiếp xúc với cạnh BC . Cho miền tam giác ABC và nửa hình tròn trên quay quanh trục AC tạo thành các khối tròn xoay

có thể tích lần lượt là V_1, V_2 . Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

Câu IV (1,0 điểm). Tìm họ nguyên hàm $I = \int \frac{\ln x + 1}{\sqrt{x \ln x + 1} + 1} dx$.

Câu V (2,0 điểm). Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x+2} + \sqrt{y+2} = \sqrt{7y-3x+8} \\ \sqrt[3]{3xy-8x+5} = xy^2-6x^2+12y+7 \end{cases}$.

Câu VI (2,0 điểm). Cho dãy (a_n) xác định $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + \frac{n+1}{2^n}}, \forall n \geq 1 \end{cases}$. Tìm số hạng tổng quát a_n

và tính $\lim a_n$.

.....**HẾT**.....

Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinhSố báo danh

Giám thị coi thi

HƯỚNG DẪN GIẢI THAM KHẢO

Câu I. 1. Cho hàm số $y = x^3 + mx^2 + 1$ có đồ thị (C_m) . Tìm các giá trị của tham số m để đường thẳng $(d): y = 1 - x$ cắt đồ thị (C_m) tại 3 điểm phân biệt sao cho tiếp tuyến của đồ thị (C_m) tại hai trong ba điểm đó vuông góc với nhau.

Hướng dẫn

Giả sử có ba giao điểm là A, B, C khác nhau, phương trình hoành độ giao điểm là:

$x^3 + mx^2 + x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow A(0; -1) \\ x^2 + mx + 1 = 0 (*) \end{cases}$. Để thấy $k_A = 0 \Rightarrow y'_t = -1$ suy ra không có tiếp tuyến vuông góc nhau tại A . Còn lại hai giao điểm B, C có hoành độ là nghiệm của $(*)$.

Ta có $\begin{cases} x_1 x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = -m \end{cases}$ và để hai tiếp tuyến vuông góc nhau thì $x_1(3x_1 + 2m) \cdot x_2(3x_2 + 2m) = -1$

$$\Rightarrow 9 - 6m^2 + 4m^2 = -1 \Rightarrow m^2 = 5 \Rightarrow m = \pm\sqrt{5}, \text{ thỏa mãn } \Delta = m^2 - 4 > 0.$$

Vậy các giá trị của m là $m = \pm\sqrt{5}$.

Câu I. 2. Cho hàm số $y = \frac{(x+1)^2}{x+2}$ có đồ thị (C) . Gọi $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ là các điểm cực trị của (C) với $x_1 < x_2$. Tìm điểm M trên trục tung sao cho $T = 2MA^2 - MB^2 + |2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Hướng dẫn.

Ta có $y = x + \frac{1}{x+2}, x \neq -2 \Rightarrow y' = 1 - \frac{1}{(x+2)^2} \Rightarrow x_1 = -3, x_2 = -1$ là hoành độ các điểm cực

trị hay $A(-3; -4), B(-1; 1)$. Gọi I là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} = 0 \Rightarrow I(-5; -9)$.

Khi đó $T = 2\overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 + |2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}| = 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 - (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 + |\overrightarrow{MI}|$

$$T = 2IA^2 - IB^2 + MI^2 + MI = 2 + 5^2 + (y+9)^2 + \sqrt{5^2 + (y+9)^2} \geq 27 + 5 = 32$$

Nên $T_{\min} = 32 \Leftrightarrow y = -9 \Leftrightarrow M(0; -9)$.

Câu II. 1. Giải phương trình: $\frac{1}{2} \log_{1+\sqrt{3}}(2x+2) = \log_{3+2\sqrt{3}}(2x+1)$.

Hướng dẫn.

PT $\frac{1}{2} \log_{1+\sqrt{3}}(2x+2) = \log_{3+2\sqrt{3}}(2x+1) = t \Leftrightarrow 2x+2 = (1+\sqrt{3})^{2t} = (3+2\sqrt{3})^t + 1$

$$\Rightarrow 1 = \left(\frac{3+2\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}} \right)^t + \left(\frac{1}{4+2\sqrt{3}} \right)^t \Leftrightarrow f(t) = a^t + b^t - 1 = 0, (0 < a, b < 1), \text{ ta có}$$

$f'(t) = a^t \ln a + b^t \ln b < 0, \forall t$ suy ra $f(t)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên $f(t) = 0$ có nghiệm duy nhất $t = 1 \Rightarrow x = 1 + \sqrt{3}$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

Câu II. 2. Cho các số thực $a, b, c \in [2; 8]$ và thỏa mãn điều kiện $abc = 64$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \log_2^2 a + \log_2^2 b + \log_2^2 c$.

Hướng dẫn.

Đặt $\log_2 a = x, \log_2 b = y, \log_2 c = z \Rightarrow x, y, z \in [1; 3], x + y + z = 6$. Ta cần tìm GTLN của

$P = x^2 + y^2 + z^2$. Không giảm tổng quát ta giả sử $1 \leq x \leq y \leq z \leq 3 \Rightarrow x \in [1; 2], z \in [2; 3]$.

$P = x^2 + z^2 + (6 - z - x)^2 = 2z^2 - 2(6 - x)z + 36 + 2x^2 - 12x$ (Parabol đồng biến đối với z vì

$\frac{6 - x}{2} = 3 - \frac{x}{2} \in \left[2; \frac{5}{2}\right] \Rightarrow P \leq 2 \cdot 3^2 - 6(6 - x) + 36 + 2x^2 - 12x = 2x^2 - 6x + 18 \leq 14$ (tại

$x = 1 \cup x = 2$) suy ra $P_{\max} = 14 \Leftrightarrow x = 1, y = 2, z = 3$ (loại $y = 1, x = 2, z = 3$).

Vậy $P_{\max} = 14 \Leftrightarrow a = 2, b = 4, c = 8$ (và các hoán vị).

Câu III. 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thang cân với $AD = 2a, AB = BC = CD = a$, cạnh SA vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm của SB và N là điểm thuộc đoạn SD sao cho $NS = 2ND$. Biết khoảng cách từ S đến mặt phẳng (AMN) bằng $\frac{6a\sqrt{43}}{43}$, tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$ theo a .

Hướng dẫn.

Gọi E là trung điểm của AD thì dễ dàng chứng minh được $ABCE$ là hình thoi cạnh a , CDE là tam giác đều cạnh a . Kẻ CH vuông góc với ED thì $CH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và là đường cao của hình thang

cân $ABCD$, suy ra $S_{ABCD} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.

Lấy $a = 1$. Dựng hệ tọa độ $Axyz$ như hình

vẽ, với $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; 0\right), D(0; 2; 0), S(0; 0; 3h)$,

khi đó tọa độ các điểm

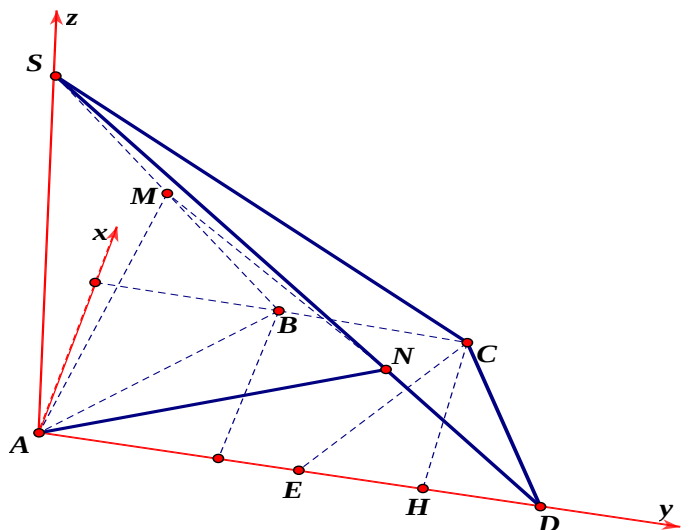
$M\left(\frac{\sqrt{3}}{4}; \frac{1}{4}; \frac{3h}{2}\right), N\left(0; \frac{2}{3}; h\right)$.

Ta có $\left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}\right] = \left(-\frac{3h}{4}; -\frac{h\sqrt{3}}{4}; \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$, khi

đó phương trình mặt phẳng (AMN) là

$$3hx + h\sqrt{3}y - \frac{2\sqrt{3}}{3}z = 0$$

Khoảng cách $d(S, (AMN)) = \frac{2h\sqrt{3}}{\sqrt{9h^2 + 3h^2 + \frac{4}{3}}} = \frac{6}{\sqrt{43}}$ suy ra

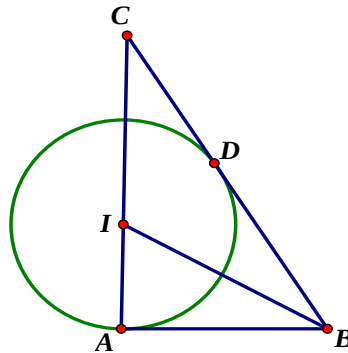


$$43h^2 = 3\left(12h^2 + \frac{4}{3}\right) = 36h^2 + 4 \Rightarrow h = \frac{2}{\sqrt{7}} \Rightarrow S\left(0; 0; \frac{6}{\sqrt{7}}\right) \text{ hay } SA = \frac{6a\sqrt{7}}{7} \text{ và thể tích khối chóp}$$

$$S.ABCD \text{ là: } V = \frac{1}{3} \cdot \frac{6a\sqrt{7}}{7} \cdot \frac{3a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^3\sqrt{21}}{14}.$$

Câu III. 2. Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Đường phân giác của góc $\widehat{ABC}$ cắt AC tại I . Trên nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AC , vẽ nửa đường tròn tâm I tiếp xúc với cạnh BC . Cho miền tam giác ABC và nửa hình tròn trên quay quanh trục AC tạo thành các khối tròn xoay có thể tích lần lượt là V_1, V_2 . Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

Hướng dẫn.



Đặt $AB = a$, khi đó $AC = h = AB \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$, $IA = R = AB \tan 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Khi cho tam giác ABC và nửa hình tròn tâm I quay xung xung quanh AC thì tạo thành khối nón tròn xoay và khối cầu. Ta có: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{V_{\text{nón}}}{V_{\text{cầu}}} = \frac{\pi a^2 h / 3}{4\pi R^3 / 3} = \frac{a^2 \cdot a\sqrt{3}}{4 \cdot a^3 \frac{\sqrt{3}}{9}} = \frac{9}{4}$.

Câu IV. Tìm họ nguyên hàm $I = \int \frac{1 + \ln x}{\sqrt{x \ln x + 1} + 1} dx$.

Hướng dẫn.

Đặt $\sqrt{x \ln x + 1} + 1 = t \Rightarrow x \ln x + 1 = (t - 1)^2 \Rightarrow (1 + \ln x) dx = 2(t - 1) dt$, suy ra

$$I(t) = \int \frac{2(t-1)}{t} dt = 2t - 2 \ln t + C \Rightarrow I(x) = 2\sqrt{x \ln x + 1} - 2 \ln(\sqrt{x \ln x + 1} + 1) + C.$$

Câu V. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{x+2} + \sqrt{y+2} = \sqrt{7y-3x+8} \\ \sqrt[3]{3xy-8x+5} = xy^2-6x^2+12y-7 \end{cases}$$

Hướng dẫn.

+ Xét $x = -2$ thì từ phương trình đầu ta có $y = -2$ thế vào phương trình thứ hai không thỏa mãn. Lập luận tương tự đối với $y = -2$ ta suy ra điều kiện $x, y > -2$.

+ Biến đổi phương trình thứ nhất:

$$1 + \sqrt{\frac{y+2}{x+2}} = \sqrt{7\left(\frac{y+2}{x+2}\right)} - 3 \Leftrightarrow 1 + \sqrt{t} = \sqrt{7t-3}, t > 0 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow x = y > -2.$$

Thế vào phương trình thứ hai: $\sqrt[3]{3x^2 - 8x + 5} = x^3 - 6x^2 + 12x - 7$ (*).

Đặt $\sqrt[3]{3x^2 - 8x + 5} = t \Rightarrow 3x^2 - 8x + 5 = t^3$, từ (*) ta có $t^3 + t = (x-1)^3 + (x-1) = u^3 + u$

Hay $(t-u)(t^2 + tu + u^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow t = u = x-1$. Từ đó ta được:

$$3x^2 - 8x + 5 = (x-1)^3 \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = 2, x = 3 \text{ (thỏa mãn)}.$$

Vậy hệ đã cho có ba nghiệm $(x, y) \in \{(1;1), (2;2), (3;3)\}$.

Câu VI. Cho dãy (a_n) xác định $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + \frac{n+1}{2^n}}, \forall n \geq 1 \end{cases}$. Tìm số hạng tổng quát a_n và tính

$\lim a_n$.

Hướng dẫn.

Dễ thấy dãy số đã cho là dãy số dương và tăng. Giả sử $a_n = \sqrt{4 - \frac{n+2}{2^{n-1}}}$, $\forall n \geq 1$, khi đó ta có:

$$a_1 = 1 \text{ đúng, } a_{n+1} = \sqrt{4 - \frac{n+2}{2^{n-1}} + \frac{n+1}{2^n}} = \sqrt{4 - \frac{2n+4}{2^n} + \frac{n+1}{2^n}} = \sqrt{4 - \frac{n+3}{2^n}} \text{ (đúng tới } n+1 \text{)}.$$

Vậy $a_n = \sqrt{4 - \frac{n+2}{2^{n-1}}}$, $\forall n \geq 1$. Suy ra $\lim a_n = \lim \sqrt{4 - \frac{n+2}{2^{n-1}}} = \sqrt{4} = 2$.

Lời bình: Nhìn chung đề này ở mức độ khá.

.....**HẾT**.....