

Câu 1. (5,0 điểm) Cho hàm số $y = 1 + (m^2 - 4)x + (4m - 1)x^2 - x^3$, với m là tham số.

- a) Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
 b) Tìm các số thực m để hàm số đã cho đạt cực đại tại $x = 1$.
 c) Tìm các số thực m để giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $[-2; -1]$ bằng 9

Giải

a) $y' = -3x^2 + 2(4m - 1)x + m^2 - 4$,

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \Delta'_{y'} \leq 0 \Leftrightarrow (4m - 1)^2 + 3(m^2 - 4) \leq 0 \Leftrightarrow 19m^2 - 8m - 11 \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{11}{19} \leq m \leq 1.$$

Vậy có hai giá trị nguyên $m = 0$ và $m = 1$

b) Hàm số có cực đại tại $x = 1 \Rightarrow y'(1) = 0 \Leftrightarrow m^2 + 8m - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -9 \end{cases}$

+ Nếu $m = 1 \Rightarrow y' = -3x^2 + 6x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ không là cực đại $\Rightarrow m = 1$ (loại)

+ Nếu $m = -9$, $y' = -3x^2 - 74x + 77$, $y'' = -6x - 74$, $y''(1) = -80 < 0$ nên hàm số có cực đại tại $x = 1$. Vậy $m = -9$ (nhận)

c) Vì $\min_{[-2; -1]} y = 9$ suy ra mọi giá trị của hàm số y với $\forall x \in [-2; -1]$ phải lớn hơn hay bằng 9

nghĩa là $\begin{cases} y(-1) \geq 9 \\ y(-2) \geq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2 + 4m + 5 \geq 9 \\ -2m^2 + 16m + 13 \geq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4m + 4 \leq 0 \\ 2m^2 - 16m - 4 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2$

Thử lại ta có $y = -x^3 + 7x^2 + 1$ có $y' = -3x^2 + 14x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{14}{3} \end{cases}$

Suy ra hàm nghịch biến trên $[-2; -1]$ và $\min_{[-2; -1]} y = y(-1) = 9$. Vậy $m = 2$ thỏa mãn

Câu 2. (3,0 điểm)

- 1) Giải phương trình $(\sqrt{10} + 3)^x + (\sqrt{10} - 3)^x = 38$.
 2) Giải phương trình $\sin 2x - \cos 2x + 3 \sin x - \cos x - 1 = 0$

Giải

1) Vì $(\sqrt{10} + 3)^x \cdot (\sqrt{10} - 3)^x = (10 - 9)^x = 1$

Đặt $t = (\sqrt{10} + 3)^x$ ($t > 0$) $\Rightarrow (\sqrt{10} - 3)^x = \frac{1}{t}$

Ta được : $t + \frac{1}{t} = 38 \Leftrightarrow t^2 - 38t + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 19 + 6\sqrt{10} = (\sqrt{10} + 3)^2 \\ t = 19 - 6\sqrt{10} = (\sqrt{10} - 3)^2 = \frac{1}{(\sqrt{10} + 3)^2} \end{cases} = (\sqrt{10} + 3)^{-2}$

$\Rightarrow \begin{cases} (\sqrt{10} + 3)^x = (\sqrt{10} + 3)^2 \\ (\sqrt{10} + 3)^x = (\sqrt{10} + 3)^{-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$

2) $\sin 2x - \cos 2x + 3 \sin x - \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x(2 \sin x - 1) + 2 \sin^2 x + 3 \sin x - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \cos x(2\sin x - 1) + (2\sin x - 1)(\sin x + 2) = 0 \Leftrightarrow (2\sin x - 1)(\sin x + \cos x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \\ \sin x + \cos x = -2 \text{ (VN)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Câu 3. (2,0 điểm) Một trang trại xây một bể nước hình hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $18,432 \text{ m}^3$ (tính cả thành và đáy bể), biết đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Chi phí xây bể được tính theo tổng diện tích của thành (mặt bên ngoài) và đáy bể với giá $800 \text{ nghìn đồng/m}^2$. Tìm các kích thước của bể để chi phí xây bể là nhỏ nhất và tính gần đúng chi phí đó.

Giải

Gọi chiều dài rộng, chiều dài và chiều cao của hình hộp chữ nhật là

$$x, 2x, h \quad (x, h > 0) \Rightarrow V = 2x^2h = 18,432 \Rightarrow h = \frac{18,432}{2x^2}$$

$$\text{Tổng diện tích 5 mặt (không có nắp) là } S = 2x^2 + 6xh = 2x^2 + 6x \frac{18,432}{2x^2} = 2x^2 + \frac{55,296}{x}$$

$$\text{Xét } f(x) = 2x^2 + \frac{55,296}{x} = 2x^2 + \frac{27,648}{x} + \frac{27,648}{x} \geq 3\sqrt{2x^2 \cdot \frac{27,648}{x} \cdot \frac{27,648}{x}} = 34,56$$

$$\text{Dấu } = \text{ xảy ra } \Leftrightarrow 2x^2 = \frac{27,648}{x} \Leftrightarrow x = 2,4 \Rightarrow h = 1,6.$$

Vậy ba kích thước chiều rộng, chiều dài và chiều cao là $2,4 ; 4,8 ; 1,2$

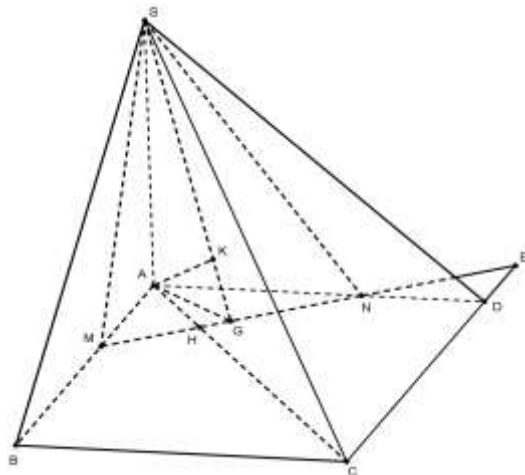
Chi phí là $34,56 \cdot 800000 = 27648000$ (đồng)

Câu 4. (3,5 điểm)

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a và SA vuông góc mặt phẳng đáy, $SA = a$. Biết M, N là hai điểm thay đổi lần lượt thuộc hai cạnh AB và AD sao cho $AM + AN = a$

- 1) Chứng minh thể tích $S.AMCN$ có giá trị không đổi
- 2) Tính theo a khoảng cách từ C đến (SMN) . Chứng minh mặt phẳng (SMN) luôn tiếp xúc với một mặt cầu cố định.

Giải



1) Đặt $AM = m, AN = n \Rightarrow m + n = a \Rightarrow ND = m, BM = n$

$$S_{\Delta MBC} = \frac{1}{2} BM \cdot BC = \frac{an}{2}, S_{\Delta NDC} = \frac{1}{2} ND \cdot DC = \frac{am}{2} \Rightarrow S_{\Delta MCN} = a - \left(\frac{am}{2} + \frac{an}{2} \right) = a^2 - \frac{a}{2}(m+n) = \frac{a^2}{2}$$

(không đổi) suy ra thể tích khối $S.AMCN = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{\Delta AMN} = \frac{a^3}{6}$ (không đổi)

$$2) \text{ Ta có } \frac{DE}{AM} = \frac{ND}{NA} = \frac{m}{n} \Rightarrow DE = \frac{m^2}{n} \Rightarrow CE = a + DE = a + \frac{m^2}{n} = \frac{an + m^2}{n} = \frac{(m+n)n + m^2}{n} \\ = \frac{m^2 + mn + n^2}{n}$$

$$\frac{HC}{HA} = \frac{CE}{MA} = \frac{m^2 + mn + n^2}{mn} = k \Rightarrow d(C, (SMN)) = k \cdot d(A, (SMN))$$

Gọi G, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên MN và SG

$$SG \Rightarrow AK \perp (SMN) \Rightarrow d(A, (SMN)) = AK$$

$$AG^2 = \frac{AM^2 \cdot AN^2}{AM^2 + AN^2} = \frac{m^2 n^2}{m^2 + n^2}$$

$$AK^2 = \frac{AG^2 \cdot SA^2}{AG^2 + SA^2} = \frac{\frac{m^2 n^2}{m^2 + n^2} \cdot a^2}{\frac{m^2 n^2}{m^2 + n^2} + a^2} = \frac{m^2 n^2 (m+n)^2}{m^2 n^2 + (m+n)^2 (m^2 + n^2)} = \frac{m^2 n^2 (m+n)^2}{m^2 n^2 + (m+n)^2 [(m+n)^2 - 2mn]} \\ = \frac{m^2 n^2 (m+n)^2}{[(m+n)^2 - mn]^2} \Rightarrow AK = \frac{mn(m+n)}{(m+n)^2 - mn}$$

$$\Rightarrow d(C, (AMN)) = k \cdot AK = \frac{(m+n)(m^2 + mn + n^2)}{(m+n)^2 - mn} = m + n = a$$

Cách khác: Chọn $A(0;0;0), S(0;0;a), C(a;a;0), M(m;0;0), N(0;n;0)$

$$\overrightarrow{SM} = (m; 0; -a),$$

$$\overrightarrow{SN} = (0; n; -a) \Rightarrow [\overrightarrow{SM}, \overrightarrow{SN}] = (an; am; mn)$$

$$\text{Phương trình } (SMN): anx + amy + mnz - mna = 0 \Rightarrow d(C, (SMN)) = \frac{|a^2 n + a^2 m - mna|}{\sqrt{(an)^2 + (am)^2 + (mn)^2}}$$

$$= \frac{|a^3 - mna|}{\sqrt{a^2(n^2 + m^2) + m^2 n^2}} = \frac{|a(a^2 - mn)|}{\sqrt{a^2[(m+n)^2 - 2mn] + m^2 n^2}} = \frac{|a(a^2 - mn)|}{\sqrt{a^2(a^2 - 2mn) + m^2 n^2}} \\ = \frac{|a(a^2 - mn)|}{\sqrt{a^4 - 2amn + m^2 n^2}} = \frac{|a(a^2 - mn)|}{|a^2 - mn|} = a$$

Vì $d(C, (SMN)) = a$ cố định và C cố định nên (SMN) luôn tiếp xúc mặt cầu cố định có tâm C và bán kính $R = a$

Câu 5. (3,0 điểm)

- 1) Một tổ gồm 8 học sinh là An, Bình, Châu, Dũng, Em, Fin, Giang, Hạnh sẽ cùng đi trên một chuyến bay để dự đợt học tập, tham quan và trải nghiệm ; đại lý dành cho tổ 8 vé máy bay có số ghế là $18A, 18B, 18C, 18D, 18E, 18F, 18G, 18H$. Mỗi học sinh chọn ngẫu nhiên một vé. Tính xác suất để có đúng 4 học sinh trong tổ mà mỗi bạn chọn được một vé có chữ của số ghế trùng với chữ đầu của tên mình.
- 2) Cho n và k là hai số nguyên dương thỏa mãn $n \geq k$. Chứng minh rằng $C_n^k C_{n+k}^k$ là số chẵn

Giải

1) $n(\Omega) = 8!$

Chọn 4 học sinh trong 8 học sinh, sau đó phát vé có chữ số ghế trùng với chữ đầu tiên của tên học sinh thì có 1 cách chọn

Còn 4 học sinh còn lại và phát không đúng như đề bài, giả sử các vé sắp xếp sẵn theo thứ tự là $ABCD$

+ Bạn có tên chữ cái B đứng đầu xếp vào vị trí đầu tiên ta có các cách sau:

$BADC$; $BCDA$; $BDAC$

+ Bạn có tên chữ cái C đứng đầu xếp vào vị trí đầu tiên ta có các cách sau:

$CADB$; $CDAB$; $CDBA$

+ Bạn có tên chữ cái D đứng đầu xếp vào vị trí đầu tiên ta có các cách sau:

$DABC$; $DCAB$; $DCBA$

Vậy có $C_8^4 \cdot 1 \cdot 9$ (cách chọn) nên xác suất cần tìm là: $\frac{C_8^4 \cdot 9}{8!} = \frac{1}{64}$

2) Ta có:

$$\begin{aligned} C_n^k C_{n+k}^k &= \frac{n!(n+k)!}{k!k!(n-k)!n!} = \frac{(n+k)!}{k!k!(n-k)!} = \frac{(n+k)!(2k)!}{k!k!(n-k)!(2k)!} = \frac{(n+k)! \cdot 2}{(2k)!(n-k)!} \cdot \frac{k \cdot (2k-1)!}{k!k!} \\ &= \frac{(n+k)! \cdot 2}{(2k)!(n-k)!} \cdot \frac{(2k-1)!}{[(2k-1)-k]!k!} = 2C_{n+k}^{n-k} \cdot C_{2k-1}^k : 2 \end{aligned}$$

Câu 6. (3,5 điểm)

1) Giải phương trình $3 - x + \log_2 \sqrt{2-x} = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 + 2\sqrt{2-x} + \log_2 \left(2 - \frac{1}{x}\right)$

2) Cho ba số thực a, b, c thỏa mãn $ab + bc + 2ac = 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a^2 + 2b^2 + c^2$

Giải

$$3 - x + \log_2 \sqrt{2-x} = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 + 2\sqrt{2-x} + \log_2 \left(2 - \frac{1}{x}\right) \quad (1)$$

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 2-x > 0 \\ x \neq 0 \\ 2 - \frac{1}{x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x \neq 0 \\ \begin{cases} x < 0 \\ \frac{1}{2} < x < 2 \\ x > \frac{1}{2} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ \frac{1}{2} < x < 2 \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow (\sqrt{2-x}-1)^2 + \log_2 \sqrt{2-x} = \left(\left(2 - \frac{1}{x} \right) - 1 \right)^2 + \log_2 \left(2 - \frac{1}{x} \right)$$

$$\text{Xét hàm } f(t) = (t-1)^2 + \log_2 t \quad (t > 0), \quad f'(t) = 2t - 2 + \frac{1}{t \ln 2} \geq 2\sqrt{\frac{2}{\ln 2}} - 2 = \sqrt{\frac{8}{\ln 2}} - 2 > 0$$

$$\text{Có thể xét } f''(t) = 2 - \frac{1}{t^2 \ln 2}$$

$$f''(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{t^2 \ln 2} = 2 \Leftrightarrow t = \frac{1}{\sqrt{2 \ln 2}}$$

$$\text{Lập bảng biến thiên suy ra } \min f'(t) = f' \left(\frac{1}{\sqrt{2 \ln 2}} \right) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\ln 2}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\ln 2}} - 2 = \sqrt{\frac{8}{\ln 2}} - 2 > 0$$

Suy ra $f'(t) > 0 \quad \forall t > 0 \Rightarrow f(t)$ đồng biến

$$\text{Ta được } \sqrt{2-x} = 2 - \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + 3x - 1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{-3 - \sqrt{13}}{2} \\ x = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

$$\text{So với điều kiện ta có nghiệm } x = 1, x = \frac{-3 - \sqrt{13}}{2}$$

2) Cho ba số thực a, b, c thỏa mãn $ab + bc + 2ac = 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a^2 + 2b^2 + c^2$

Ta có:

$$6 = ab + bc + 2ca = (\sqrt{2} - 1).a.[(\sqrt{2} + 1)b] + (\sqrt{2} - 1).c.[(\sqrt{2} + 1)b] + 2ca$$

$$\leq (\sqrt{2} - 1). \left(\frac{a^2 + (\sqrt{2} + 1)^2 b^2}{2} \right) + (\sqrt{2} - 1). \left(\frac{c^2 + (\sqrt{2} + 1)^2 b^2}{2} \right) + (a^2 + c^2)$$

$$\Leftrightarrow 6 \leq \frac{\sqrt{2} + 1}{2} a^2 + (\sqrt{2} + 1) b^2 + \frac{\sqrt{2} + 1}{2} c^2 = \frac{\sqrt{2} + 1}{2} (a^2 + 2b^2 + c^2)$$

$$\Leftrightarrow 6 \leq \frac{\sqrt{2} + 1}{2} P \Leftrightarrow P \geq 12(\sqrt{2} - 1)$$

----- **HẾT** -----