

Đề thi gồm có 08 trang

Thời gian làm bài: 90 phút (không kể thời gian giao đề)

- Câu 1.** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;-2;0)$ và mặt phẳng $(P): 2x - 2y + z + 3 = 0$. Mặt phẳng $(\alpha): 2x + by + cz + d = 0$ (với $b, c, d \in \mathbb{R}$) đi qua điểm A , song song với trục Oy và vuông góc với (P) . Khi đó, giá trị $b - c + d$ bằng
- A.** 2. **B.** 0. **C.** 4. **D.** 8.

Lời giải

Chọn A

Ta có mặt phẳng (P) có 1 vector pháp tuyến $\vec{n}_p = (2; -2; 1)$.

Trục Oy có 1 vector chỉ phương $\vec{j} = (0; 1; 0)$.

Suy ra $[\vec{n}_p, \vec{j}] = (-1; 0; 2) / \vec{n} = (1; 0; -2)$.

Mặt phẳng (α) vuông góc với mặt phẳng (P) và song song với trục Oy nên nhận vector $\vec{n} = (1; 0; -2)$ là vector pháp tuyến, mặt phẳng (α) đi qua điểm A nên có phương trình $1.(x-1) + 0.(y+2) - 2.(z-0) = 0 \Leftrightarrow x - 2z - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x - 4z - 2 = 0$.

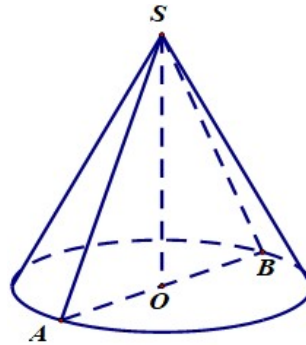
Do đó $b = 0; c = -4; d = -2$. Vậy $b - c + d = 2$.

- Câu 2.** Thiết diện qua trục của hình nón (N) là tam giác vuông cân có cạnh góc vuông bằng a . Tính diện tích toàn phần của hình nón (N) .

A. $S_{xq} = \frac{\pi a^2 (1 + 2\sqrt{2})}{2}$. **B.** $S_{xq} = \frac{\pi a^2 (2 + \sqrt{2})}{2}$. **C.** $S_{xq} = \pi a^2 (\sqrt{2} + 1)$. **D.** $S_{xq} = \frac{\pi a^2 (\sqrt{2} + 1)}{2}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có tam giác SAB vuông cân tại S có $SA = SB = a$.

Suy ra $AB = \sqrt{SA^2 + SB^2} = a\sqrt{2} \Rightarrow R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Diện tích xung quanh hình nón (N) là $S_{xq} = \pi Rl = \pi \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a = \frac{\pi a^2 \sqrt{2}}{2}$.

Diện tích mặt đáy hình nón (N) là $S_d = \pi R^2 = \frac{\pi a^2}{2}$.

Vậy diện tích toàn phần của hình nón là $S = S_d + S_{xq} = \frac{\pi a^2 (\sqrt{2} + 1)}{2}$.

Câu 3. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \log(x^2 - 2mx + 4)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

- A. $m = 2$. B. $m < 2$. C. $\begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \end{cases}$. D. $-2 < m < 2$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Điều kiện } x^2 - 2mx + 4 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > 0 \\ m^2 - 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m < 2.$$

Vậy $-2 < m < 2$.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số có đạo hàm cấp hai liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi (C) là đồ thị của hàm số đã cho. Tiếp tuyến với đồ thị (C) tại các điểm có hoành độ $x = -1; x = 0$ lần lượt tạo với trục hoành góc $30^\circ; 45^\circ$. Tiếp tuyến với đồ thị (C) tại các điểm có hoành độ $x = 1; x = 2$ lần lượt song song với đường thẳng $d_1: y = 2x - 1$ và vuông góc với đường thẳng $d_2: y = x + 5$.

$$\text{Tính } I = 3 \int_{-1}^0 f'(x) \cdot f''(x) dx + 4 \int_1^2 (f'(x))^3 \cdot f''(x) dx$$

- A. $\frac{1}{2}$. B. $-\frac{37}{12}$. C. -58 . D. -14 .

Lời giải

Chọn D

♦ Từ giả thiết, ta có: $f'(-1) = \pm \tan 30^\circ = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}; f'(0) = \pm \tan 45^\circ = \pm 1; f'(1) = 2; f'(2) = -1$.

♦ Đặt $t = f'(x) \Rightarrow dt = f''(x) dx$.

♦ TH1: $f'(-1) = \frac{\sqrt{3}}{3}; f'(0) = 1; f'(1) = 2; f'(2) = -1$, ta có

$$I = 3 \int_{-1}^0 f'(x) \cdot f''(x) dx + 4 \int_1^2 (f'(x))^3 \cdot f''(x) dx = 3 \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^1 t dt + 4 \int_2^{-1} t^3 dt = -14$$

♦ TH2: $f'(-1) = \frac{\sqrt{3}}{3}; f'(0) = -1; f'(1) = 2; f'(2) = -1$, ta có

$$I = 3 \int_{-1}^0 f'(x) \cdot f''(x) dx + 4 \int_1^2 (f'(x))^3 \cdot f''(x) dx = 3 \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{-1} t dt + 4 \int_2^{-1} t^3 dt = -14$$

♦ TH3: $f'(-1) = -\frac{\sqrt{3}}{3}; f'(0) = 1; f'(1) = 2; f'(2) = -1$, ta có

$$I = 3 \int_{-1}^0 f'(x) \cdot f''(x) dx + 4 \int_1^2 (f'(x))^3 \cdot f''(x) dx = 3 \int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^1 t dt + 4 \int_2^{-1} t^3 dt = -14$$

♦ TH4: $f'(-1) = -\frac{\sqrt{3}}{3}; f'(0) = -1; f'(1) = 2; f'(2) = -1$, ta có

$$I = 3 \int_{-1}^0 f'(x) \cdot f''(x) dx + 4 \int_1^2 (f'(x))^3 \cdot f''(x) dx = 3 \int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{-1} t dt + 4 \int_2^{-1} t^3 dt = -14$$

$$\diamond \text{ Vậy } I = 3 \int_{-1}^0 f'(x) \cdot f''(x) dx + 4 \int_1^2 (f'(x))^3 \cdot f''(x) dx = -14$$

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết $f'(x)$ có bảng xét dấu như sau:

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y = f(x^2 + 2x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.** $(-2; 1)$. **B.** $(-4; -3)$. **C.** $(-2; -1)$. **D.** $(0; 1)$.

Lời giải

Chọn C

$\diamond$ Ta có: $y' = (2x + 2) f'(x^2 + 2x)$

$\diamond$ Hàm số nghịch biến khi

$$y' < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2 > 0 \\ f'(x^2 + 2x) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x^2 + 2x < -2 \\ x^2 + 2x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x \in \emptyset \\ x < -3 \vee x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ -3 < x < -1 \end{cases}$$

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0; 1]$, thỏa mãn

$$\int_0^1 f'(x) g(x) dx = 2022; \int_0^1 f(x) g'(x) dx = 2023. \text{ Giá trị của biểu thức } f(1)g(1) - f(0)g(0) \text{ bằng}$$

- A.** -1 . **B.** 1 . **C.** 4045 . **D.** 4046 .

Lời giải

Chọn C

$$\diamond \text{ Đặt } \begin{cases} u = g(x) \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = g'(x) dx \\ v = f(x) \end{cases}$$

$$\diamond \text{ Ta có: } \int_0^1 f'(x) g(x) dx = f(x) g(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x) g'(x) dx$$

$$\Rightarrow 2022 = f(1)g(1) - f(0)g(0) - 2023 \Rightarrow f(1)g(1) - f(0)g(0) = 4045$$

Câu 7. Cho hàm số $y = \frac{m \ln x - 2}{\ln x + 1}$ (m là tham số thực). Gọi m_0 là giá trị của m để $\min_{[1; e]} y + \max_{[1; e]} y = 2$.

Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A.** $0 < m_0 < 10$. **B.** $m_0 < -2$. **C.** $6 < m_0 < 11$. **D.** $0 \leq m_0 \leq 2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có

$$y' = \frac{(m \ln x - 2)'(\ln x + 1) - (\ln x + 1)'(m \ln x - 2)}{(\ln x + 1)^2} = \frac{\frac{m}{x}(\ln x + 1) - \frac{1}{x}(m \ln x - 2)}{(\ln x + 1)^2} = \frac{m + 2}{x(\ln x + 1)^2}.$$

TH1: Nếu $m + 2 > 0 \Leftrightarrow m > -2$.

$$\text{Khi đó } y' = \frac{m + 2}{x(\ln x + 1)^2} > 0 \quad \forall x \in (1; e) \Rightarrow \min_{[1; e]} y = y(1) = -2, \quad \max_{[1; e]} y = y(e) = \frac{m - 2}{2}.$$

$$\text{Suy ra } \min_{[1; e]} y + \max_{[1; e]} y = 2 \Leftrightarrow -2 + \frac{m - 2}{2} = 2 \Leftrightarrow m - 2 = 8 \Leftrightarrow m = 10 \text{ (thỏa mãn).}$$

TH2: Nếu $m + 2 < 0 \Leftrightarrow m < -2$.

$$\text{Khi đó } y' = \frac{m + 2}{x(\ln x + 1)^2} < 0 \quad \forall x \in (1; e) \Rightarrow \max_{[1; e]} y = y(1) = -2, \quad \min_{[1; e]} y = y(e) = \frac{m - 2}{2}.$$

$$\text{Suy ra } \min_{[1; e]} y + \max_{[1; e]} y = 2 \Leftrightarrow -2 + \frac{m - 2}{2} = 2 \Leftrightarrow m - 2 = 8 \Leftrightarrow m = 10 \text{ (không thỏa mãn).}$$

Vậy $m_0 = 10$. Suy ra khẳng định đúng là $6 < m_0 < 11$.

Câu 8. Cho biểu thức $P = x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{x}$ với $x > 0$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $P = x^{\frac{7}{6}}$.

B. $P = x$.

C. $P = x^{\frac{11}{6}}$.

D. $P = x^{\frac{5}{6}}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } P = x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{1}{6}} = x^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = x.$$

Câu 9. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f(6) = 1$ và

$$\int_0^6 (x^2 \cdot f'(x) + 6f(x)) dx = 10. \text{ Khi đó } \int_{-3}^3 xf'(x+3) dx \text{ bằng}$$

A. 13.

B. 26.

C. -13.

D. -26.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Với } I = \int_{-3}^3 xf'(x+3) dx.$$

$$\text{Đặt } t = x + 3 \Rightarrow \begin{cases} x = t - 3 \\ dt = dx \end{cases}.$$

Đổi cận: Khi $x = -3 \Rightarrow t = 0$; $x = 3 \Rightarrow t = 6$.

$$\text{Ta có } I = \int_0^6 (t - 3)f(t) dt = \int_0^6 (x - 3)f(x) dx = \int_0^6 xf(x) dx - 3 \int_0^6 f(x) dx.$$

$$\text{Mặt khác } \int_0^6 (x^2 \cdot f'(x) + 6f(x)) dx = 10 \Leftrightarrow \int_0^6 x^2 \cdot f'(x) dx + 6 \int_0^6 f(x) dx = 10$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \int_0^6 x^2 \cdot f'(x) dx + 3 \int_0^6 f(x) dx = 5 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \int_0^6 x^2 \cdot f'(x) dx - 5 = -3 \int_0^6 f(x) dx.$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } I &= \int_0^6 xf'(x) dx - 3 \int_0^6 f(x) dx = \int_0^6 xf'(x) dx + \frac{1}{2} \int_0^6 x^2 \cdot f'(x) dx - 5 \\ &= \frac{1}{2} \int_0^6 2xf'(x) dx + \frac{1}{2} \int_0^6 x^2 \cdot f'(x) dx - 5 = \frac{1}{2} \left(\int_0^6 [2xf'(x) + x^2 \cdot f'(x)] dx \right) - 5 \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^6 [x^2 \cdot f(x)]' dx \right) - 5 = \frac{1}{2} x^2 \cdot f(x) \Big|_0^6 - 5 = 18 \cdot f(6) - 0 - 5 = 13. \end{aligned}$$

Vậy $I = 13$.

Câu 10. Biết $F(x) = e^x + 2x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Khi đó $\int f(2x) dx$ bằng

A. $\frac{1}{2}e^{2x} + 4x^2 + C$. **B.** $\frac{1}{2}e^{2x} + 2x^2 + C$. **C.** $2e^x + 4x^2 + C$. **D.** $e^{2x} + 8x^2 + C$.

Lời giải

Chọn A

Xét $I = \int f(2x) dx$

Đặt $t = 2x \Rightarrow dx = \frac{1}{2} dt$. Khi đó $I = \frac{1}{2} \int f(t) dt = \frac{1}{2} e^t + t^2 + C$.

Kết luận: $I = \int f(2x) dx = \frac{1}{2} e^{2x} + 4x^2 + C$.

Câu 11. Cho $a > 0, b > 0$ và $ab \neq 1$ thỏa mãn $3 \ln a + 7 \ln b = 0$. Khi đó $\log_{\sqrt{ab}}(a\sqrt[3]{b})$ bằng

A. 3. **B.** $-\frac{1}{3}$. **C.** -3. **D.** $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $3 \ln a + 7 \ln b = 0 \Leftrightarrow \ln a = -\frac{7}{3} \ln b$

$$\text{Xét } \log_{\sqrt{ab}}(a\sqrt[3]{b}) = \frac{\ln(a\sqrt[3]{b})}{\ln(\sqrt{ab})} = \frac{\ln a + \frac{1}{3} \ln b}{\frac{1}{2}(\ln a + \ln b)} = \frac{-\frac{7}{3} \ln b + \frac{1}{3} \ln b}{\frac{1}{2}(-\frac{7}{3} \ln b + \ln b)} = 3.$$

Kết luận: $\log_{\sqrt{ab}}(a\sqrt[3]{b}) = 3$.

Câu 12. Cho hàm số $y = x^{2021} + \sqrt{2022}x$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của x để $f(22x) > f(x^2)$?

A. 20. **B.** 23. **C.** 21. **D.** 22.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số: $y = x^{2021} + \sqrt{2022}x \Rightarrow y' = 2021x^{2020} + \sqrt{2022} \Rightarrow y' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ Hàm số $y = x^{2021} + \sqrt{2022}x$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow f(22x) > f(x^2) \Leftrightarrow 22x > x^2 \Leftrightarrow 0 < x < 22$.

$$\Rightarrow x \in \{1; 2; 3; 4; \dots; 21\}.$$

Kết luận: Có 21 giá trị nguyên.

Câu 13. Cho khối chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng $3a$. Tính thể tích của khối chóp đã cho.

A. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{2}.$

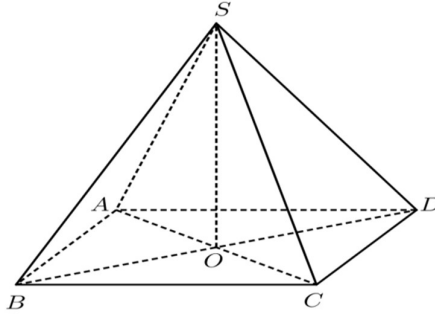
B. $V = \frac{\sqrt{34}a^3}{6}.$

C. $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{6}.$

D. $V = \frac{\sqrt{34}a^3}{2}.$

Lời giải

Chọn B



Giả sử có hình chóp đều $S.ABCD$ và $AB = a$, $SA = 3a$.

Gọi SO là đường cao của hình chóp, với O tâm của $ABCD$.

Vì $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $ABCD$ là hình vuông có cạnh $AB = a \Rightarrow AC = a\sqrt{2}$.

Xét tam giác vuông SOA có

$$SA^2 = SO^2 + OA^2 \Leftrightarrow SO^2 = SA^2 - \left(\frac{AC}{2}\right)^2 = (3a)^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{17a^2}{2} \Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{34}}{2}.$$

$$\text{Thể tích khối chóp } S.ABCD \text{ là: } V = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SO = \frac{1}{3}.a^2.\frac{a\sqrt{34}}{2} = \frac{a^3\sqrt{34}}{6}.$$

Câu 14. Cho $I = \int_0^1 x^5 \sqrt{1-x^3} dx$. Nếu đặt $t = \sqrt{1-x^3}$ thì

A. $I = \frac{2}{3} \int_0^1 t^2 (1-t^2) dt.$ **B.** $I = 2 \int_0^1 t^2 (1-t^2) dt.$ **C.** $I = \frac{2}{3} \int_0^1 t^2 (t^2-1) dt.$ **D.** $I = 2 \int_0^1 t^2 (t^2-1) dt.$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } I = \int_0^1 x^5 \sqrt{1-x^3} dx = \int_0^1 x^3 \sqrt{1-x^3} . x^2 dx.$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{1-x^3} \Rightarrow t^2 = 1-x^3 \Rightarrow x^3 = 1-t^2$$

$$\Rightarrow d(x^3) = d(1-t^2) \Rightarrow x^2 dx = -\frac{2}{3} t dt.$$

Với $x = 0 \Rightarrow t = 1$; và với $x = 1 \Rightarrow t = 0$.

$$\text{Khi đó } I = \int_1^0 (1-t^2) t . \left(-\frac{2}{3} t\right) dt = \frac{2}{3} \int_0^1 t^2 (1-t^2) dt.$$

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại C , $AC = a\sqrt{2}$, $AB = a\sqrt{6}$.

Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ biết $SC = 3a$.

A. $\sqrt{14}a^3.$

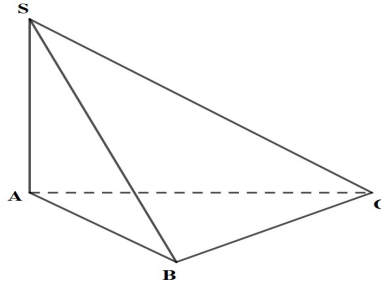
B. $\frac{a^3\sqrt{14}}{3}.$

C. $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}.$

D. $\frac{2a^3\sqrt{42}}{3}.$

Lời giải

Chọn B



Trong tam giác ABC có $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = 2a$.

Trong tam giác SAC có $SA = \sqrt{SC^2 - AC^2} = a\sqrt{7}$.

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là

$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} SA \cdot \frac{1}{2} CA \cdot CB = \frac{1}{3} \cdot a\sqrt{7} \cdot \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot 2a = \frac{a^3\sqrt{14}}{3}.$$

Câu 16. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x + 2y + 3z - 7 = 0$ và hai đường thẳng $d_1: \frac{x+3}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+2}{-4}$, $d_2: \frac{x+1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{3}$. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (P) và cắt cả hai đường thẳng d_1 và d_2 có phương trình là

A. $\frac{x+5}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{3}$.

B. $\frac{x+7}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-6}{3}$.

C. $\frac{x+4}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+1}{3}$.

D. $\frac{x+3}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+2}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Lấy $A(-3+2t; -2-t; -2-4t) = d \cap d_1$ và $B(-1+3t'; -1+2t'; 2+3t') = d \cap d_2$, suy ra $\overrightarrow{AB} = (2+3t'-2t; 1+2t'+t; 4+3t'+4t)$.

Đường thẳng d nhận $\overrightarrow{AB}$ làm véc-tơ chỉ phương.

Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng nên $\overrightarrow{n_p} = k\overrightarrow{AB} (k \neq 0)$. Khi đó

$$\frac{2+3t'-2t}{1} = \frac{1+2t'+t}{2} = \frac{4+3t'+4t}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t' = -2 \end{cases}$$

Do đó d qua $A(-5; -1; 2)$ và nhận véc-tơ $\overrightarrow{n_p} = (1; 2; 3)$ làm véc-tơ chỉ phương có phương trình

$$d: \frac{x+5}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{3}.$$

Câu 17. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $(2; 5)$ thỏa mãn $f'(x) \geq 0, \forall x \in (2; 5)$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in [3; 4]$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(2; 5)$.

B. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(4; 5)$.

C. $f(\sqrt{10}) = f(\sqrt{13})$.

D. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(2;3)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f'(x) \geq 0, \forall x \in (2;5), f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in [3;4]$ nên tồn tại vô số điểm $x \in [3;4]$ để $f'(x) = 0$

Vậy hàm số $f(x)$ không đồng biến trên khoảng $(2;5)$.

Câu 18. Một vật N_1 , có dạng khối nón có chiều cao bằng 40 cm. Người ta cắt vật N_1 bằng một mặt phẳng song song với mặt đáy của nó để được một khối nón nhỏ N_2 có thể tích bằng $\frac{1}{8}$ thể tích N_1 . Tính chiều cao h của khối nón N_2 .

A. 20 cm.

B. 10 cm.

C. 5 cm.

D. 40 cm.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } \frac{h_2}{h_1} = \frac{r_2}{r_1} = k \text{ nên } \frac{V_{N_2}}{V_{N_1}} = \frac{\frac{1}{3}\pi r_2^2 h_2}{\frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 \cdot \frac{h_2}{h_1} = k^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow k = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Khi đó } h_2 = \frac{1}{2}h_1 = 20 \text{ cm.}$$

Câu 19. Quay xung quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = (2x-1)\sqrt{\ln x}$, trục Ox , và đường thẳng $x=2$ ta thu được khối tròn xoay có thể tích bằng

A. $\int_{\frac{1}{2}}^2 (2x-1)^2 \ln x dx$. **B.** $\pi \int_{\frac{1}{2}}^2 (2x-1)^2 \ln x dx$. **C.** $\pi \int_1^2 (2x-1)^2 \ln x dx$. **D.** $\pi \int_1^2 (2x-1)^2 \ln x dx$.

Lời giải

Chọn C

♦ Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$$(2x-1)\sqrt{\ln x} = 0, \text{ ĐK } \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1=0 \\ \ln x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ x=1 \end{cases}$$

♦ Thể tích khối tròn xoay quay quanh Ox là: $V = \pi \int_1^2 (2x-1)^2 \ln x dx$.

Câu 20. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(4;2;3), B(1;-2;3), C(1;2;3)$. Tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC là điểm:

A. $I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{6}; \frac{3}{4}\right)$.

B. $I\left(3; \frac{2}{3}; 3\right)$.

C. $I(2;1;3)$.

D. $I\left(3;1; \frac{9}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn C

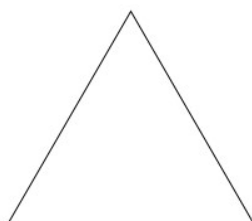
♦ Gọi $I(x_I; y_I; z_I)$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

Ta có $AB = 5, AC = 3, BC = 4$

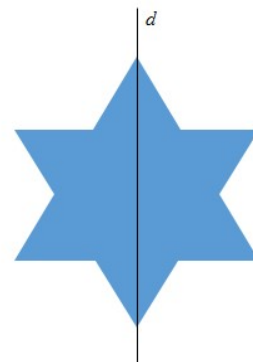
$$\text{Tọa độ tâm } I \text{ được tính theo công thức: } \begin{cases} x_I = \frac{BC.x_A + CA.x_B + AB.x_C}{BC + CA + AB} = \frac{4.4 + 3.1 + 5.1}{4 + 3 + 5} = 2 \\ y_I = \frac{BC.y_A + CA.y_B + AB.y_C}{BC + CA + AB} = \frac{4.2 + 3.(-2) + 5.2}{4 + 3 + 5} = 1 \\ z_I = \frac{BC.z_A + CA.z_B + AB.z_C}{BC + CA + AB} = \frac{4.3 + 3.3 + 5.3}{4 + 3 + 5} = 3 \end{cases}$$

♦ Vậy tọa độ điểm $I(2; 1; 3)$.

Câu 21: Ban đầu ta có một tam giác đều cạnh bằng 3 (hình 1). Tiếp đó ta chia mỗi cạnh của tam giác thành ba đoạn bằng nhau và thay mỗi đoạn ở giữa bằng hai đoạn bằng nó sao cho chúng tạo với đoạn bỏ đi một tam giác đều về phía bên ngoài để được hình như hình 2.



Hình 1



Hình 2

Quay hình 2 xung quanh trục d ta được một khối tròn xoay có thể tích bằng

A. $\frac{5\pi\sqrt{3}}{2}$.

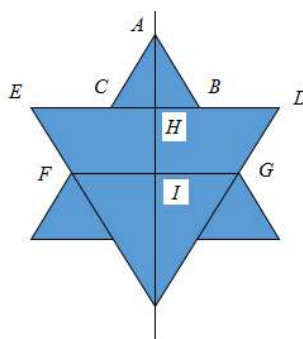
B. $\frac{9\pi\sqrt{3}}{8}$.

C. $\frac{5\pi\sqrt{3}}{3}$.

D. $\frac{5\pi\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải

Chọn C



Hình 2

Ta đánh dấu các điểm như hình vẽ. Do tính chất đối xứng nên thể tích cần tìm của khối tròn xoay bài ra bằng 2 lần thể tích của đường gấp khúc $ABDGI$ quay quanh trục d . Đường gấp khúc này

khi quay quanh d tạo ra 1 khối nón có $r = \frac{1}{2}$ và đường cao $h = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 1 khối nón cụt có chiều cao

$h_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, hai đáy $r_1 = HD = \frac{3}{2}, r_2 = IG = \frac{2}{3}HD = 1$ nên ta có thể tích lần lượt tính theo công thức

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi.r^2.h, V_2 = \frac{\pi h}{3}(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2).$$

Ta được $V_1 + V_2 = \frac{5\pi\sqrt{3}}{6}$. Từ đó ta có được thể tích khối tròn xoay cần tìm là $V = \frac{5\pi\sqrt{3}}{3}$.

- Câu 22:** Biết rằng phương trình $3\log_5^3 x = \log_5^2 x^3 + \log_5(125x^9)$ có nghiệm duy nhất $x = 5^{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}}$ với a, b, c là các số nguyên dương đôi một phân biệt. Giá trị của tích abc bằng
- A.** 9. **B.** 12. **C.** 7. **D.** 8.

Lời giải

Chọn D

Ta có $3\log_5^3 x = \log_5^2 x^3 + \log_5(125x^9) \Leftrightarrow 3\log_5^3 x - 9\log_5^2 x - 9\log_5 x - 3 = 0 \Leftrightarrow \log_5 x = \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1$
 $\Leftrightarrow x = 5^{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1}$ nên $a = 4; b = 2; c = 1 \Rightarrow abc = 8$.

- Câu 23.** Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của m để phương trình

$$9^{x+1} - m(4\sqrt[4]{x^2 + 2x + 1} + 3m + 3).3^x + 1 = 0$$

có nghiệm duy nhất. Tổng các phần tử của S bằng

- A.** -1. **B.** 1. **C.** 2. **D.** -2.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $9^{x+1} - m(4\sqrt[4]{x^2 + 2x + 1} + 3m + 3).3^x + 1 = 0 \Leftrightarrow 3^{x+2} + 3^{-x} - m(4\sqrt[4]{x+1} + 3m + 3) = 0$.

Nhận xét: Nếu x_0 là nghiệm của phương trình đã cho thì $-x_0 - 2$ cũng là nghiệm của phương trình đã cho.

Do đó điều kiện cần để phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x_0 = -x_0 - 2 \Leftrightarrow x_0 = -1$.

Thay $x_0 = -1$ vào phương trình đã cho ta được $1 - m(3m + 3) \cdot \frac{1}{3} + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -2 \end{cases}$.

Điều kiện đủ:

- Với $m = 1$: Phương trình đã cho có dạng: $9^{x+1} - (4\sqrt[4]{x+1} + 6).3^x + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow (3^{x+1} - 1)^2 - 4\sqrt[4]{x+1}.3^x = 0 \quad (1)$$

Dễ thấy $x = -2, x = -1$ và $x = 0$ là nghiệm của phương trình (1).

$\Rightarrow m = 1$ không thỏa mãn.

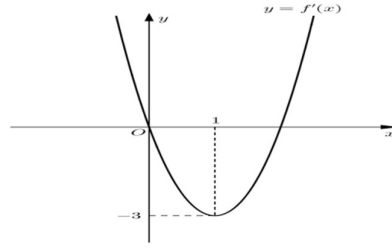
- Với $m = -2$: Phương trình đã cho có dạng: $9^{x+1} + 2(4\sqrt[4]{x+1} - 3).3^x + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow (3^{x+1} - 1)^2 + 8\sqrt[4]{x+1}.3^x = 0 \Leftrightarrow x = -1.$$

$\Rightarrow m = -2$ thỏa mãn.

Do đó $S = \{-2\}$. Vậy tổng các phần tử của S bằng -2.

- Câu 24.** Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị (C). Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ.



Biết rằng đường thẳng $d : y = x$ cắt đồ thị (C) tạo thành hai phần hình phẳng có diện tích bằng nhau. Giá trị $a + b - c - d$ bằng

A. 6.

B. -5.

C. 1.

D. -6.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

$$\text{Từ hình vẽ suy ra } \begin{cases} -\frac{b}{3a} = 1 \\ f'(0) = 0 \\ f'(1) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -3a \\ c = 0 \\ 3a + 2b + c = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x \Rightarrow f''(x) = 6x - 6 \text{ và } f(x) = x^3 - 3x^2 + d.$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow \text{Điểm uốn của đồ thị } (C) \text{ là điểm } I(1; d - 2).$$

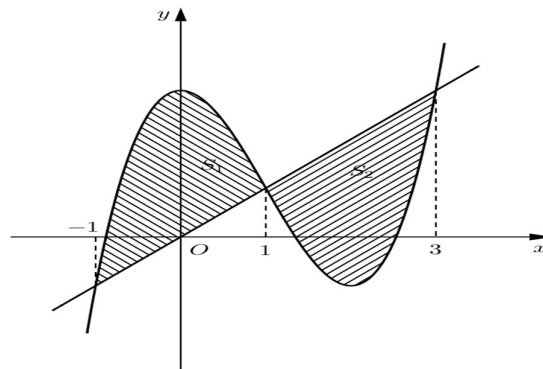
Điều kiện cần: Đường thẳng $d : y = x$ cắt đồ thị (C) tạo thành hai phần hình phẳng có diện tích bằng nhau khi đường thẳng $d : y = x$ đi qua điểm uốn $I(1; d - 2)$ của đồ thị (C) .

$$\Rightarrow d - 2 = 1 \Leftrightarrow d = 3.$$

Điều kiện đủ: Với $d = 3 \Rightarrow f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$.

Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng d và đồ thị (C) là:

$$x^3 - 3x^2 + 3 = x \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$



Đường thẳng $d : y = x$ cắt đồ thị (C) tạo thành hai phần hình phẳng có diện tích lần lượt là:

$$S_1 = \int_{-1}^1 [f(x) - x] dx = \int_{-1}^1 (x^3 - 3x^2 - x + 3) dx = 4.$$

$$S_2 = \int_1^3 [x - f(x)] dx = \int_1^3 (-x^3 + 3x^2 + x - 3) dx = 4.$$

Vậy $a = 1; b = -3; c = 0; d = 3 \Rightarrow a + b - c - d = -5$.

Câu 25. Biết $\int \frac{4x-1}{2x^2+5x-3} dx = \frac{a}{b} \ln|2x-1| + \frac{c}{b} \ln|x+3| + C$ với a, b, c là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}, \frac{c}{b}$ là các phân số tối giản. Tính $S = 2a + 3b + c$.

A. $S = 36$.

B. $S = 34$.

C. $S = 32$.

D. $S = 38$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\frac{4x-1}{2x^2+5x-3} = \frac{4x-1}{(2x-1)(x+3)}$, gọi A, B là hai số thực thỏa mãn

$$\frac{4x-1}{(2x-1)(x+3)} = \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{x+3}.$$

$$\text{Khi đó ta có: } \begin{cases} A+2B=4 \\ 3A-B=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=\frac{2}{7} \\ B=\frac{13}{7} \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra } \int \frac{4x-1}{2x^2+5x-3} dx = \frac{2}{7} \int \left(\frac{1}{2x-1} \right) dx + \frac{13}{7} \int \left(\frac{1}{x+3} \right) dx = \frac{1}{7} \ln|2x-1| + \frac{13}{7} \ln|x+3| + C.$$

Do đó, $a = 1, b = 7, c = 13$ nên $S = 2a + 3b + c = 36$.

Câu 26. Cho các số thực x, y thỏa mãn $\log_8(x^3 + x^2 + x) - \log_4(x+1) = \log_8(y+2) + \log_{64}(y+1)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $a \in [-10; 10]$ để biểu thức $P = \left| y - \frac{4x}{\sqrt{x+1}} + a \right|$ có giá trị nhỏ nhất bằng 0.

A. 6.

B. 15.

C. 1.

D. 16.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x^3 + x^2 + x > 0 \\ x+1 > 0 \\ y+2 > 0 \\ y+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y > -1 \end{cases}.$$

Với điều kiện trên ta có:

$$\frac{1}{3} \log_2(x^3 + x^2 + x) - \frac{1}{2} \log_2(x+1) = \frac{1}{3} \log_2(y+2) + \frac{1}{6} \log_2(y+1)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \frac{(x^3 + x^2 + x)^2}{(x+1)^3} = \log_2 (y+2)^2 (y+1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x^3 + x^2 + x)^2}{(x+1)^3} = (y+2)^2 (y+1)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x+1} + 1 \right)^2 \cdot \left(\frac{x^2}{x+1} \right) = (y+2)^2 (y+1) (*).$$

Xét hàm số $f(t) = t(t+1)^2 = t^3 + 2t^2 + t$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

Ta có $f'(t) = 3t^2 + 4t + 1 > 0, \forall t \in (0; +\infty)$.

Khi đó $(*) \Leftrightarrow f\left(\frac{x^2}{x+1}\right) = f(y+1) \Leftrightarrow \frac{x^2}{x+1} = y+1 \Leftrightarrow y = \frac{x^2}{x+1} - 1$.

$$P = \left| \frac{x^2}{x+1} - \frac{4x}{\sqrt{x+1}} + a - 1 \right|$$

Đặt $u = \frac{x}{\sqrt{x+1}}$ với $x \in (0; +\infty)$ thì ta có $u \in (0; +\infty)$.

Xét hàm $g(u) = u^2 - 4u + a - 1, g'(u) = 2u - 4 \Rightarrow g'(u) = 0 \Leftrightarrow u = 2$

Ta có bảng biến thiên

u	0	2	$+\infty$
$g'(u)$		0	+
$g(u)$	$a-1$	$a-5$	$+\infty$

Khi đó, $P = |g(u)|$ có giá trị nhỏ nhất bằng 0 khi và chỉ khi $a-5 \leq 0 \Leftrightarrow a \leq 5 (*)$.

Mặt khác: $\begin{cases} a \in \mathbb{Z} \\ a \in [-10; 10] \end{cases} (**)$

Từ (*) và (**) suy ra $a \in \{-10; -9; \dots; 5\}$

Vậy có 16 giá trị nguyên của a thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 27. Xác định m để phương trình $2 \log_{(m^2+2)}(x-1) = \log_{(m^2+2)}(mx^2+1)$ có nghiệm.

A. $\begin{cases} m > 1 \\ m < -1 \end{cases}$

B. $m > 1$.

C. $m < 1$.

D. $-1 < m < 1$.

Lời giải

Chọn D

$$2 \log_{(m^2+2)}(x-1) = \log_{(m^2+2)}(mx^2+1) \Leftrightarrow \log_{(m^2+2)}(x-1)^2 = \log_{(m^2+2)}(mx^2+1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 > 0 \\ mx^2+1 = (x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ mx^2+1 = x^2-2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ m = 1 - \frac{2}{x} \end{cases}$$

Đặt $f(x) = 1 - \frac{2}{x}, \forall x > 1$ ta có $f'(x) = \frac{2}{x^2} > 0; \forall x > 1$.

x	1	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	-1	1

Vậy $-1 < m < 1$

Câu 28. Tìm số hạng chứa x^3 trong khai triển $(1+x-2x^2)^{20}$.

A. $380x^3$.

B. $540x^3$.

C. $1900x^3$.

D. $160x^3$.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$$*) (1+x-2x^2)^{20} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_{20}x^{20}$$

$$*) (1+x-2x^2)^{20} = (1-x)^{20} (1+2x)^{20} = \sum_{i=0}^{20} C_{20}^i (-1)^i x^i \sum_{j=0}^{20} C_{20}^j 2^j x^j$$

Do đó, số hạng chứa x^3 trong khai triển là:

$$a_3x^3 = C_{20}^0 \cdot C_{20}^3 \cdot 2^3 \cdot x^3 + C_{20}^3 \cdot (-1)^3 \cdot C_{20}^0 \cdot x^3 + C_{20}^1 \cdot (-1) \cdot C_{20}^2 \cdot 2^2 \cdot x^3 + C_{20}^2 \cdot (-1)^2 \cdot C_{20}^1 \cdot 2 \cdot x^3 = 380x^3.$$

Câu 29. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn

$$4x.f(x^2) + 3f(1-x) = 4x\sqrt{1-x^2} + 3\sqrt{x}, \forall x \in [0;1].$$

Tính tích phân $I = \int_0^1 f(x) dx$.

A. $\frac{1}{6}$.

B. $\frac{1}{4}$.

C. $\frac{2}{3}$.

D. $\frac{5}{6}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $4x.f(x^2) + 3f(1-x) = 4x\sqrt{1-x^2} + 3\sqrt{x}, \forall x \in [0;1].$

$$\Rightarrow \int_0^1 4x.f(x^2) dx + \int_0^1 3f(1-x) dx = \int_0^1 4x\sqrt{1-x^2} dx + \int_0^1 3\sqrt{x} dx$$

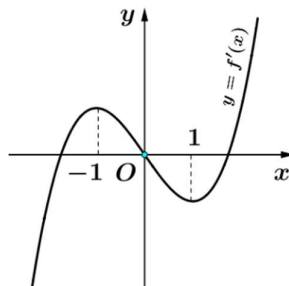
$$\Leftrightarrow \int_0^1 2.f(x^2) d(x^2) - \int_0^1 3f(1-x) d(1-x) = -\int_0^1 2\sqrt{1-x^2} d(1-x^2) + \int_0^1 3\sqrt{x} dx$$

$$\Leftrightarrow 2 \int_0^1 f(t) dt + 3 \int_0^1 f(u) du = \left[-\frac{4}{3} \sqrt{(1-x^2)^3} + 2\sqrt{x^3} \right]_0^1$$

$$\Leftrightarrow 5 \int_0^1 f(x) dx = \left(-\frac{4}{3} \cdot 0 + 2 \cdot 1 \right) - \left(-\frac{4}{3} \cdot 1 + 2 \cdot 0 \right) = \frac{10}{3} \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Vậy } I = \int_0^1 f(x) dx = \frac{2}{3}.$$

Câu 30. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f(1) = 1$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ sau



Có bao nhiêu số nguyên dương a để hàm số $y = |4f(\sin x) + \cos 2x - a|$ nghịch biến trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$?

A. 2.

B. Vô số.

C. 3.

D. 5.

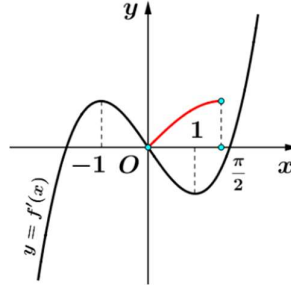
Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $g(x) = 4f(\sin x) + \cos 2x - a$ trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Ta có $g'(x) = 4\cos x \cdot f'(x) - 4\sin x \cdot \cos x = 4\cos x[f'(x) - \sin x]$

Do $\cos x > 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ nên $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = \sin x$ (vô nghiệm vì trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ ta thấy đồ thị hàm $y = \sin x$ nằm phía trên đồ thị $f'(x)$)



Bảng biến thiên

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$g'(x)$		-
$g(x)$	$g(0)$	$g\left(\frac{\pi}{2}\right)$

Dựa vào bảng biến thiên, để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ thì

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) \geq 0 \Leftrightarrow 4f(1) - 1 - a \geq 0 \Leftrightarrow 3 - a \geq 0 \Leftrightarrow a \leq 3$$

Mà $a \in \mathbb{N}^*$ nên $a \in \{1; 2; 3\}$

Vậy có 3 giá trị nguyên dương của a thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 31: Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f(-2) = -2, f(2) = 2$ và có bảng biến thiên như hình vẽ sau.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$		2		-2		$+\infty$

Có bao nhiêu số tự nhiên m để bất phương trình $f(-f(x)) \geq m$ có nghiệm trên đoạn $[-1; 1]$?

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $y = f(-f(x))$ trên đoạn $[-1; 1]$ ta có:

$$y' = -f'(x) \cdot f'(-f(x))$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f'(-f(x)) = 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

$$f'(-f(x)) = 0 \Leftrightarrow -f(x) = \pm 1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 1 \\ f(x) = -1 \end{cases}$$

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \in (-2; -1)(L) \\ x = x_2 \in (-1; 1) \\ x = x_3 \in (1; 2)(L) \end{cases}$$

$$f(x) = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_4 \in (-2; -1)(L) \\ x = x_5 \in (-1; 1)(x_5 > x_2) \\ x = x_6 \in (1; 2)(L) \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên như sau:

x	-1		x_2		x_5		1
y'	0	-	0	+	0	-	0
y	-2		2		-2		2

Từ bảng biến thiên ta thấy bất phương trình $f(-f(x)) \geq m$ có nghiệm trên đoạn $[-1; 1] \Leftrightarrow m \leq 2$

Mà m là số tự nhiên nên $m \in \{0; 1; 2\}$

Câu 32: Cho hình chóp $O.ABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi α, β, γ lần lượt là góc tạo bởi các đường thẳng OA, OB, OC với mặt phẳng (ABC) . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = (3 + \cot^2 \alpha)(3 + \cot^2 \beta)(3 + \cot^2 \gamma)$ bằng

A. 48.

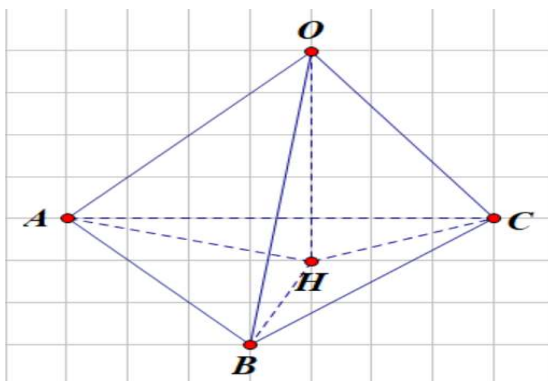
B. 125.

C. $125\sqrt{3}$.

D. $48\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi H là trực tâm của tam giác ABC . Ta có:

+) H là hình chiếu vuông góc của O trên mặt phẳng (ABC) .

$$+) \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}.$$

Khi đó $\alpha = \widehat{OAH}$; $\beta = \widehat{OBH}$; $\gamma = \widehat{OCH}$.

$$\text{Suy ra } \sin \alpha = \frac{OH}{OA}; \sin \beta = \frac{OH}{OB}; \sin \gamma = \frac{OH}{OC} \Rightarrow \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = \frac{OH^2}{OA^2} + \frac{OH^2}{OB^2} + \frac{OH^2}{OC^2} = 1.$$

$$\text{Đặt } \sin^2 \alpha = x; \sin^2 \beta = y; \sin^2 \gamma = z \Rightarrow x + y + z = 1 \geq 3\sqrt[3]{xyz} \Rightarrow xyz \leq \frac{1}{27}.$$

Ta có:

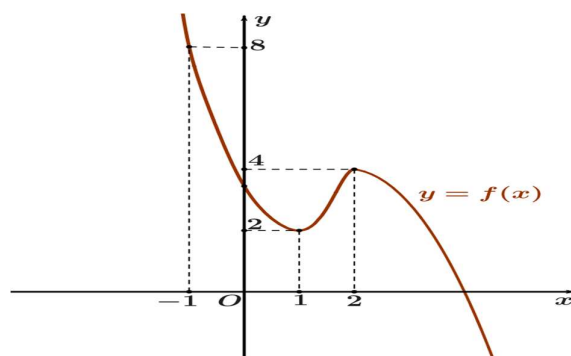
$$\begin{aligned} M &= (3 + \cot^2 \alpha)(3 + \cot^2 \beta)(3 + \cot^2 \gamma) \\ &= \left(2 + \frac{1}{\sin^2 \alpha}\right) \left(2 + \frac{1}{\sin^2 \beta}\right) \left(2 + \frac{1}{\sin^2 \gamma}\right) \\ &= \left(2 + \frac{1}{x}\right) \left(2 + \frac{1}{y}\right) \left(2 + \frac{1}{z}\right) \end{aligned}$$

Mặt khác:

$$\begin{aligned} 2 + \frac{1}{x} &= 1 + 1 + \frac{1}{3x} + \frac{1}{3x} + \frac{1}{3x} \geq 5\sqrt[5]{\frac{1}{27x^3}}; 2 + \frac{1}{y} \geq 5\sqrt[5]{\frac{1}{27y^3}}; 2 + \frac{1}{z} \geq 5\sqrt[5]{\frac{1}{27z^3}} \\ \Rightarrow M &\geq 125\sqrt[5]{\frac{1}{27^3(xy z)^3}} \geq 125 \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Câu 33: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên dưới



Tính tổng tất cả các giá trị thực của tham số m để $\max_{[-1;1]} \left| f\left(\sqrt{8+4x-4x^2}-1\right) + m \right| = 5$

A. -20.

B. -3.

C. -10.

D. -7.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $g(x) = f\left(\sqrt{8+4x-4x^2}-1\right) + m$ trên đoạn $[-1;1]$

Điều kiện: $8+4x-4x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 2$.

$$g'(x) = \frac{-2x+1}{\sqrt{-x^2+x+2}} \cdot f'(2\sqrt{-x^2+x+2}-1)$$

$$\text{Cho } g'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} -2x+1=0 \\ f'(2\sqrt{-x^2+x+2}-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ 2\sqrt{-x^2+x+2}-1=1 \\ 2\sqrt{-x^2+x+2}-1=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ x=\frac{1-\sqrt{5}}{2} (n) \\ x=\frac{1+\sqrt{5}}{2} (n) \\ x=\frac{1}{2} (k) \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } g(-1) = f(-1) + m = 8 + m$$

$$g\left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right) = f(1) + m = 2 + m$$

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = f(2) + m = 4 + m$$

$$g(2) = 8 + m$$

$$\text{Suy ra } \max_{[-1;2]} g(x) = 8 + m; \min_{[-1;2]} g(x) = 2 + m.$$

$$\text{Để } \max_{[-1;1]} \left| f(\sqrt{8+4x-4x^2}-1) + m \right| = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} |8+m|=5 \\ 5 \geq |2+m| \\ |2+m|=5 \\ 5 \geq |8+m| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=-3 \\ m=-7 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } \sum m = -3 + (-7) = -10.$$

$$\text{Chú ý: Công thức nhanh } \max_{[-1;1]} |g(x)| = \frac{|m+8+m+2| + |m+8-(m+2)|}{2} = 5.$$

Câu 34: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , $SA \perp (ABC)$, góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB bằng

A. $\frac{a\sqrt{15}}{5}$.

B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

C. $\frac{a\sqrt{7}}{7}$.

D. $2a$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y = g(x) = \frac{a}{4}x^4 + (a+b)x^3 + (3b-c)x^2 + (d-2c)x + d - 2022$

$\Rightarrow g'(x) = ax^3 + 3(a+b)x^2 + 2(3b-c)x + d - 2c = x^3 - 6x + 1$

$g'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -2,5) \cup (0,16; 2,3)$

Do đó hàm số $y = \frac{a}{4}x^4 + (a+b)x^3 + (3b-c)x^2 + (d-2c)x + d - 2022$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$.

Câu 36: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 60° . Gọi G là trọng tâm tam giác $A'BC$. Thể tích của khối cầu ngoại tiếp tứ diện $GABC$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{343\pi a^3}{1296}$.

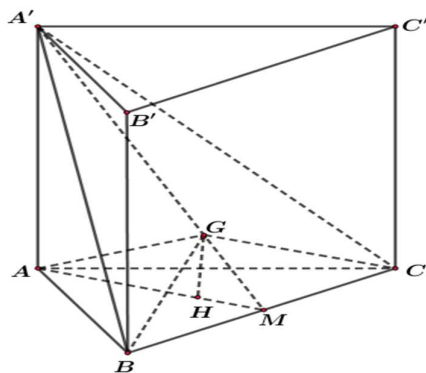
B. $\frac{49\pi a^3}{108}$.

C. $\frac{343\pi a^3}{432}$.

D. $\frac{343\pi a^3}{5184}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm của BC và H là trọng tâm tam giác ABC . Khi đó góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) là $\alpha = \widehat{AMA'} = 60^\circ$.

Ta có $\tan \alpha = \frac{AA'}{AM} \Leftrightarrow AA' = \sqrt{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3a}{2} \Rightarrow GH = \frac{1}{3} AA' = \frac{a}{2}$.

Khi đó $AG = \sqrt{GH^2 + AH^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{7}}{\sqrt{12}}$

$\Rightarrow$ bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $GABC$ là $R = \frac{AG^2}{2GH} = \frac{7a^2 \cdot 2}{12 \cdot 2a} = \frac{7a}{12}$

$\Rightarrow$ Thể tích khối cầu ngoại tiếp tứ diện $GABC$ là $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{7}{12}\right)^3 = \frac{343\pi a^3}{1296}$.

Câu 37. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S_1): (x+4)^2 + y^2 + z^2 = 16$, $(S_2): (x+4)^2 + y^2 + z^2 = 36$ và điểm $A(4;0;0)$. Đường thẳng Δ đi động nhưng luôn tiếp xúc với (S_1) , đồng thời cắt (S_2) tại hai điểm B, C phân biệt. Tam giác ABC có diện tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

A. $24\sqrt{5}$.

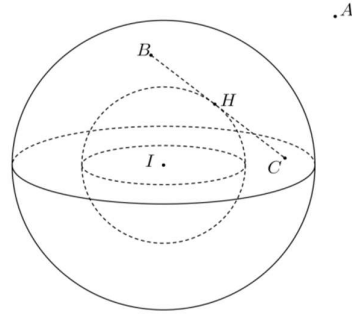
B. 48.

C. $28\sqrt{5}$.

D. 72.

Lời giải

Chọn A



Ta có (S_1) có tâm $I(-4;0;0)$ và bán kính $R_1 = 4$. (S_2) có tâm $I(-4;0;0)$ và bán kính $R_2 = 6$.

Lại có $IA = 8$ nên điểm A nằm ngoài hai mặt cầu $(S_1), (S_2)$.

Gọi H là tiếp điểm của Δ và (S_1) , ta có $IH \perp BC$ mà BC là dây cung của (S_2) nên H là trung điểm của BC .

Ta có $BC = 2BH = \sqrt{IB^2 - IH^2} = \sqrt{R_2^2 - R_1^2} = 4\sqrt{5}$.

Tam giác ABC có diện tích $S = \frac{1}{2} d(A, BC) \cdot BC = 2\sqrt{5} \cdot d(A, BC)$.

Do đó tam giác ABC có diện tích lớn nhất khi và chỉ khi $d(A, BC)$ lớn nhất.

Xét hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: Điểm A không thuộc mặt phẳng (BCI)

Ta có $d(A, BC) \leq AH = \sqrt{AI^2 + IH^2 - 2AI \cdot IH \cdot \cos \angle AIH} \leq \sqrt{AI^2 + IH^2} = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5}$.

Trường hợp 2: Điểm A thuộc mặt phẳng (BCI)

Ta có $d(A, BC) \leq AH \leq AI + IH = 12$.

Suy ra $\max d(A, BC) = 12 \Rightarrow \max S_{\Delta ABC} = 2\sqrt{5} \cdot 12 = 24\sqrt{5}$.

Vậy tam giác ABC có diện tích lớn nhất bằng $24\sqrt{5}$.

Câu 38. Cho hàm số $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)\dots(x-2021)$ Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-18; 20]$ để phương trình $f'(x) = m \cdot f(x)$ có 2022 nghiệm phân biệt?

A. 39.

B. 18.

C. 20.

D. 38.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x) = m \cdot f(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = m$.

Đặt $g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$, phương trình (*) trở thành $g(x) = m$.

Ta có $f'(x) = (x-1)(x-2)\dots(x-2021) + x(x-2)\dots(x-2021) + \dots + x(x-1)\dots(x-2020)$

$\Rightarrow g(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \dots + \frac{1}{x-2021}$.

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-2)^2} - \dots - \frac{1}{(x-2021)^2} < 0, \forall x \notin \{0; 1; 2; \dots; 2021\}.$$

Bảng biến thiên của hàm $g(x)$.

x	$-\infty$	0	1	2	...	2021	$+\infty$
$g'(x)$	-	-	-	-	-	-	-
$g(x)$	0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình $g(x) = m$ có 2022 nghiệm khi và chỉ khi $m \neq 0$.

Do m nguyên thuộc đoạn $[-18; 20]$ nên có 38 giá trị m thỏa mãn bài toán.

Câu 39. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $u_1 = 1, u_{n+1} = 2u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$ ta đặt $v_n = \sum_{k=1}^n (n-k+1)u_k$.

Hỏi trong dãy (v_n) có bao nhiêu số hạng là số nguyên dương có bốn chữ số?

A. 6.

B. 9.

C. 4.

D. 12.

Lời giải

Chọn C

Ta được (u_n) là một cấp số nhân công bội $q = 2, u_1 = 1 \Rightarrow u_n = 2^{n-1}$.

$$v_n = nu_1 + (n-1)u_2 + (n-2)u_3 + \dots + 3u_{n-2} + 2u_{n-1} + u_n$$

$$\Rightarrow v_n = n + (n-1).2 + (n-2).2^2 + \dots + 3.2^{n-3} + 2.2^{n-2} + 2^{n-1} \quad (1)$$

$$\Rightarrow 2v_n = n.2 + (n-1).2^2 + \dots + 4.2^{n-3} + 3.2^{n-2} + 2.2^{n-1} + 2^n \quad (2)$$

$$\Rightarrow v_n = -n + (2 + 2^2 + \dots + 2^n) = -n + 2 \cdot \frac{1-2^n}{1-2} = 2.2^n - n - 2$$

Hàm $f(x) = 2.2^x - x - 2$ đồng biến trên $[1; +\infty) \Rightarrow 1000 \leq f(n) \leq 9999$

Do vậy $n \in \{9; 10; 11; 12\}$.

Câu 40. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\sin x(2 - \cos 2x) - 2(2 \cos^3 x + m + 1)\sqrt{2 \cos^3 x + m + 2} = 3\sqrt{2 \cos^3 x + m + 2}$ có đúng một nghiệm trên $\left[0; \frac{2\pi}{3}\right)$?

A. 1.

B. 4.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn B

$$\sin x(2 - \cos 2x) - 2(2 \cos^3 x + m + 1)\sqrt{2 \cos^3 x + m + 2} = 3\sqrt{2 \cos^3 x + m + 2}$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin^3 x + \sin x = 2(2 \cos^3 x + m + 2)\sqrt{2 \cos^3 x + m + 2} + \sqrt{2 \cos^3 x + m + 2}$$

Hàm số $f(t) = 2t^3 + t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

$$\Rightarrow f(\sin x) = f\left(\sqrt{2 \cos^3 x + m + 2}\right) \Leftrightarrow \sin x = \sqrt{2 \cos^3 x + m + 2} \left(\sin x \geq 0 \forall x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right) \right)$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x = 2 \cos^3 x + m + 2 \Leftrightarrow -m - 1 = 2 \cos^3 x + \cos^2 x.$$

Xét hàm số $y = 2 \cos^3 x + \cos^2 x$ trên $\left[0; \frac{2\pi}{3}\right)$.

$$y' = -2 \sin x \cdot \cos x \cdot (3 \cos x + 1) \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = 0 \\ \cos x = -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{\pi}{2} \\ x = \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}\right) \end{cases}$$

BBT

x	0	$\pi/2$	α	$2\pi/3$			
y'		-	0	+	0	-	
y	3		0		1/27		0

Từ BBT ta có, phương trình đã cho có đúng 1 nghiệm khi và chỉ khi

$$\begin{cases} -m - 1 = 0 \\ \frac{1}{27} < -m - 1 \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ -4 \leq m < -\frac{28}{27} \end{cases} \Rightarrow m \in \{-4; -3; -2; -1\}.$$

Câu 41. Cho khối chóp tam giác đều $SABC$ có cạnh đáy bằng 2. Gọi M, N là trung điểm của SB, SC . tính thể tích của khối chóp $S.ABC$ biết $CM \perp BN$.

A. $\frac{\sqrt{26}}{6}$.

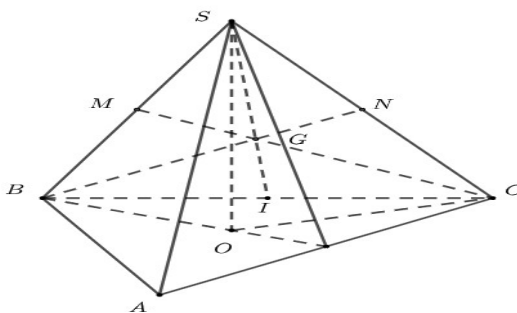
B. $\frac{\sqrt{26}}{3}$.

C. $\sqrt{26}$.

D. $\frac{\sqrt{26}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Khối chóp $SABC$ đều nên $SA = SB = SC = x$.

Gọi O là trọng tâm $\triangle ABC \Rightarrow SO \perp (ABC)$; Do $AB = 2 \Rightarrow OC = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Xét tam giác cân SBC có $SB = SC = x$.

$BN \cap CM = G \Rightarrow G$ là trọng tâm tam giác SBC .

$SG \cap BC = I$, I là trung điểm BC .

Ta có

$$-\vec{GA} = \vec{GB} + \vec{GC} \Leftrightarrow \frac{-2}{3} \vec{SI} = \frac{-2}{3} \vec{BN} + \frac{-2}{3} \vec{CM} \Leftrightarrow \vec{SI} = \vec{BN} + \vec{CM} \Leftrightarrow \vec{SI}^2 = (\vec{BN} + \vec{CM})^2$$

$$\Leftrightarrow SI^2 = BN^2 + CM^2 \text{ (do } CM \perp BN) \Leftrightarrow SC^2 - IC^2 = 2 \cdot BN^2$$

$$\text{Có } BN^2 = \frac{SB^2 + BC^2}{2} - \frac{SC^2}{4} \text{ nên } x^2 - 1 = x^2 + 4 - \frac{x^2}{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{10}$$

$$SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{\frac{26}{3}}. \text{ Diện tích } \triangle ABC: S = 2^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$$

$$\text{Thể tích khối chóp bằng } V = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{26}{3}} = \frac{\sqrt{26}}{3}.$$

Câu 42. Cho tập hợp $A = \{1; 2; \dots; 20\}$. Chọn ngẫu nhiên bốn số khác nhau từ tập A . Xác suất để bốn số được chọn ra không có hai số nào là hai số nguyên liên tiếp là

A. $\frac{28}{57}$.

B. $\frac{1}{5}$.

C. $\frac{364}{969}$.

D. $\frac{284}{285}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi A là biến cố: "bốn số được chọn ra không có hai số nào là hai số nguyên liên tiếp".

Ta có: $n(\Omega) = C_{20}^4$.

Gọi bốn số được chọn là: a, b, c, d ($a < b < c < d$).

$$\text{Có: } \begin{cases} 1 \leq a \\ a+1 < b \\ b+1 < c \Rightarrow 1 \leq a < b-1 < c-2 < d-3 \leq 17. \\ c+1 < d \\ d \leq 20 \end{cases}$$

Do đó có: C_{17}^4 cách chọn bộ bốn số a, b, c, d ($a < b < c < d$).

$$\text{Vậy: } P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{C_{17}^4}{C_{20}^4} = \frac{28}{57}.$$

Câu 43: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 2, $SA = 2$ vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$; M, N hai điểm thay đổi nằm trên hai cạnh AB, AD sao cho $(SMC) \perp (SNC)$.

Tính tổng $T = \frac{1}{AN^2} + \frac{1}{AM^2}$ khi thể tích khối chóp $S.AMCN$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $T = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$.

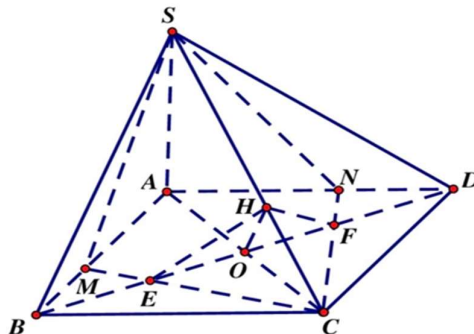
B. $T = 2$.

C. $T = \frac{13}{9}$.

D. $T = \frac{5}{4}$.

Lời giải

Chọn D



Tọa độ hóa với $O \equiv A$, $Ox \equiv AB$, $Oy \equiv AD$, $Oz \equiv AS$.

Do $SA = 2$, ta có $S(0;0;2); A(0;0;0); B(2;0;0); D(0;2;0) \Rightarrow C(2;2;0)$.

Đặt $AM = x; AN = y \ (x, y \in [0;2]) \Rightarrow M(x;0;0); N(0;y;0)$.

$$\text{Do đó } \begin{cases} \overrightarrow{SM} = (x; 0; -2) \\ \overrightarrow{SN} = (0; y; -2) \\ \overrightarrow{SC} = (2; 2; -2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{n}_{(SMC)} = [\overrightarrow{SM}; \overrightarrow{SC}] = (4; 2x - 4; 2x) \\ \vec{n}_{(SNC)} = [\overrightarrow{SN}; \overrightarrow{SC}] = (4 - 2y; -4; -2y) \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } (SMC) \perp (SNC) \Leftrightarrow 4(4 - 2y) - 4(2x - 4) - 4xy = 0 \Leftrightarrow xy + 2(x + y) = 8 \Leftrightarrow y = \frac{8 - 2x}{x + 2}.$$

$$\text{Do } y \leq 2 \Rightarrow \frac{8 - 2x}{x + 2} \leq 2 \Rightarrow x \geq 1.$$

$$S_{AMCN} = S_{ABCD} - S_{BMC} - S_{DCN} = 4 - (2 - x) - (2 - y) = x + y.$$

$$\text{Do đó } V_{SAMCD} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{AMCN} = \frac{2}{3}(x + y) = \frac{2}{3} \left(x + \frac{8 - 2x}{x + 2} \right) = \frac{2}{3} \left(\frac{8 + x^2}{x + 2} \right)$$

Xét hàm

$$f(x) = \frac{2}{3} \left(\frac{8 + x^2}{x + 2} \right); x \in [1; 2] \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{x^2 + 4x - 8}{(x + 2)^2}$$

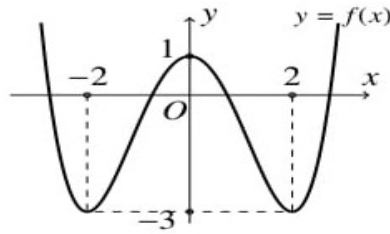
$$\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 + 2\sqrt{3} \\ x = -2 - 2\sqrt{3} (l) \end{cases}.$$

$$\text{Lập BBT ta được } \max_{[0;2]} f(x) = f(1) = f(2) = 2.$$

$$\text{Vậy } \max V_{SAMCN} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow T = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{5}{4}.$$

Câu 44: Cho hàm số trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi đồ thị hàm số

$$y = \frac{x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 8x}{[f(x)]^2 + 2f(x) - 3} \text{ có tổng cộng bao nhiêu tiệm cận } \underline{\text{đúng?}}$$



A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Chọn C

$$y = \frac{x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 8x}{[f(x)]^2 + 2f(x) - 3} = \frac{x(x + 2)^2(x - 2)}{[f(x)]^2 + 2f(x) - 3}$$

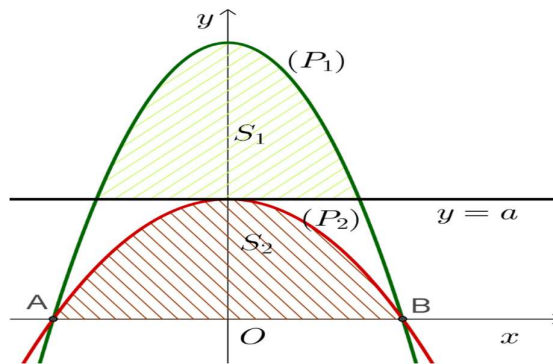
$$\text{Ta có: } [f(x)]^2 + 2f(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 1 \\ f(x) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = m (m < -2) \\ x = 0 \\ x = n (n > 2) \\ x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị ta thấy các nghiệm $x=0; x=\pm 2$ là các nghiệm kép và đa thức

$$[f(x)]^2 + 2f(x) - 3 \text{ có bậc là 8 nên } y = \frac{x(x+2)^2(x-2)}{a^2x^2(x+2)^2(x-2)^2(x-m)(x-n)}$$

Vậy hàm số có các tiệm cận đứng là $x=0; x=2; x=m; x=n$.

Câu 45. Cho parabol $(P_1): y = -x^2 + 6$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt A, B và đường thẳng $d: y = a$ ($0 < a < 6$). Xét parabol (P_2) đi qua hai điểm A, B và có đỉnh thuộc đường thẳng $y = a$. Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P_1) và d ; S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P_2) và trục hoành (tham khảo hình vẽ)



Nếu $S_1 = S_2$ thì giá trị của biểu thức $T = a^3 - 12a^2 + 108a$ bằng

A. 218.

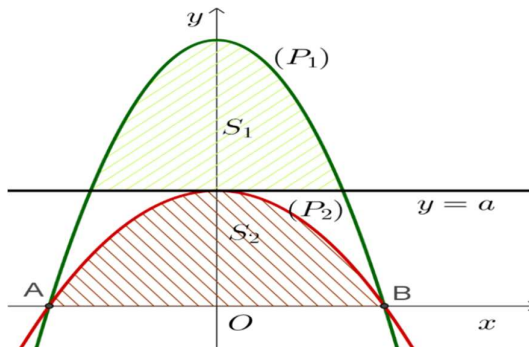
B. 219.

C. 216.

D. 217.

Lời giải

Chọn C



Phương trình hoành độ giao điểm của (P_1) và trục hoành: $-x^2 + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{6} \\ x = \sqrt{6} \end{cases}$

Phương trình hoành độ giao điểm của (P_1) và đường thẳng d :

$$-x^2 + 6 = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{6-a} \\ x = \sqrt{6-a} \end{cases}$$

$$\text{Diện tích } S_1 = 2 \int_0^{\sqrt{6-a}} (-x^2 + 6 - a) dx = 2 \left(-\frac{x^3}{3} + (6-a)x \right) \Big|_0^{\sqrt{6-a}} = \frac{4}{3}(6-a)\sqrt{6-a}$$

* (P_2) có dạng: $y = mx^2 + a$

$$\text{Điểm } A(\sqrt{6}; 0) \in (P_2) \Leftrightarrow 0 = m \cdot 6 + a \Leftrightarrow m = -\frac{a}{6}$$

$$\text{Vậy } y = -\frac{a}{6}x^2 + a = \frac{a}{6}(-x^2 + 6)$$

$$\text{Diện tích } S_2 = 2 \cdot \frac{a}{6} \int_0^{\sqrt{6}} (-x^2 + 6) dx = \frac{4\sqrt{6}a}{3}$$

$$\text{* Theo giả thiết, ta có: } S_1 = S_2 \Leftrightarrow \frac{4}{3}(6-a)\sqrt{6-a} = \frac{4\sqrt{6}a}{3}$$

$$\Leftrightarrow (6-a)^3 = 6a^2 \Leftrightarrow -a^3 + 12a^2 - 108a + 216 = 0$$

$$\text{Vậy } T = a^3 - 12a^2 + 108a = 216.$$

Câu 46. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $4^x - 2^{x+1} + 1 = 2|2^x - m|$ có hai nghiệm phân biệt?

A. 2.

B. 3.

C. 5.

D. 4.

Lời giải

Chọn A

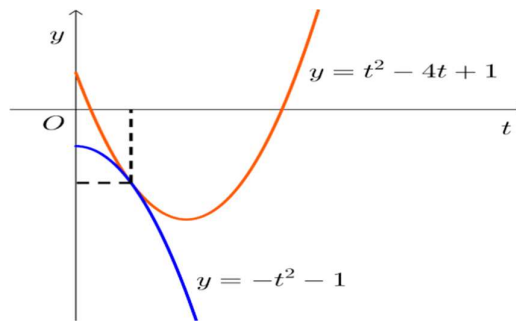
$$4^x - 2^{x+1} + 1 = 2|2^x - m| \Leftrightarrow (2^x - 1)^2 = 2|2^x - m|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(2^x - m) = 4^x - 2 \cdot 2^x + 1 \\ 2(2^x - m) = -4^x + 2 \cdot 2^x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2m = 4^x - 4 \cdot 2^x + 1 \\ -2m = -4^x - 1 \end{cases} \quad (1)$$

Đặt $t = 2^x > 0$,

$$(1) \Rightarrow \begin{cases} -2m = t^2 - 4t + 1 \\ -2m = -t^2 - 1 \end{cases} \quad (2)$$

* Đồ thị của hai hàm số $y = t^2 - 4t + 1$ và $y = -t^2 - 1$ trên $(0; +\infty)$



* Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị $(P_1): y = t^2 - 4t + 1$ và $(P_2): y = -t^2 - 1$ trên $(0; +\infty)$ là:

$$t^2 - 4t + 1 = -t^2 - 1 \Leftrightarrow 2t^2 - 4t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow y = -2$$

$\Rightarrow (P_1)$ tiếp xúc với (P_2) tại $A(1; -2)$

* Phương trình $4^x - 2^{x+1} + 1 = 2|2^x - m|$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow (2)$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < -2m \leq 1 \\ -2m = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} \leq m < \frac{1}{2} \\ m = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow m \in \{0; 1\}.$$

Vậy có hai số nguyên m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 47. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = (2m-1)x - (3m+2)\sin x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. 1.

B. 2.

C. Vô số.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

$$y = (2m-1)x - (3m+2)\sin x \Rightarrow y' = 2m-1 - (3m+2)\cos x.$$

Hàm số $y = (2m-1)x - (3m+2)\sin x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2m-1 - (3m+2)\cos x \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Đặt $t = \cos x$ ($-1 \leq t \leq 1$).

$$(1) \text{ có dạng } 2m-1 - (3m+2)t \leq 0, \forall t \in [-1; 1]$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m-1 - (3m+2) \cdot (-1) \leq 0 \\ 2m-1 - (3m+2) \cdot 1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -\frac{1}{5} \\ m \geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq m \leq -\frac{1}{5}.$$

Do m nguyên nên $m \in [-3; -2; -1]$.

Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 48. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AC = a\sqrt{3}$. Góc $\widehat{ACB} = 30^\circ$, góc giữa đường thẳng AB' và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $A'ABC$

A. $\frac{a\sqrt{21}}{2}$.

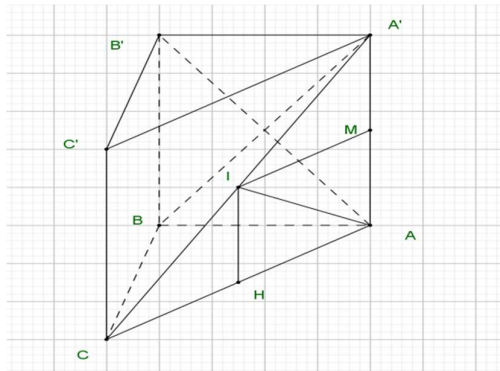
B. $\frac{a\sqrt{21}}{4}$.

C. $\frac{3a}{4}$.

B. $\frac{a\sqrt{21}}{8}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi M, H, I lần lượt là trung điểm của $AA', AC, A'C$.

Góc giữa đường thẳng AB' và mặt phẳng (ABC) là đường thẳng AB' và mặt phẳng $\widehat{BAB'} = 60^\circ$.

$$AA' = BB = \tan \widehat{BAB'} \cdot AB = \frac{3a}{2}.$$

$$\text{Tam giác } AA'C \text{ là tam giác vuông tại } A \Rightarrow A'C = \sqrt{AA'^2 + AC^2} = \sqrt{\left(\frac{3a}{2}\right)^2 + (a\sqrt{3})^2} = \frac{a\sqrt{21}}{2}$$

Tam giác ABC vuông tại B và $\widehat{ACB} = 30^\circ$ nên ta có

$$\sin \widehat{ACB} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AB = AC \cdot \sin 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \widehat{ACB} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow BC = AC \cdot \cos 30^\circ = \frac{3a}{2}.$$

$$\text{Tam giác } ABC \text{ là tam giác vuông tại } B \Rightarrow HB = HA = HC = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Tam giác } ABC \text{ là tam giác vuông tại } \Delta IHA = \Delta IHB = \Delta IHC (c.g.c) \Rightarrow IA = IB = IC \quad (1)$$

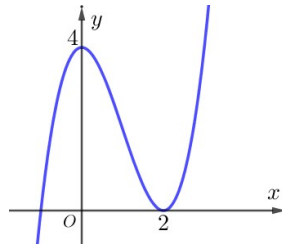
$$\text{Tam giác } AA'C \text{ là tam giác vuông tại } A \Rightarrow IC = IA = IA' = \frac{A'C}{2} = \frac{a\sqrt{21}}{4} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2)} \Rightarrow I \text{ là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện } A'ABC, \text{ bán kính } R = IA = \frac{a\sqrt{21}}{4}.$$

Câu 49. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (a, b, c, d là hằng số, $a \neq 0$) và

$$g(x) = \left(\frac{a-d}{a+b}\right)x^4 + \left(\frac{a+b}{2}\right)x^3 + (a-b-d)x + 2021$$

Biết đồ thị của hàm số $f(x)$ như hình vẽ.



Hỏi hàm số $y = f(\sqrt{1+x^2}) + g(\sqrt{1+x^2})$ có bao nhiêu cực trị?

A. 2 .

B. 3 .

C. 0 .

D. 1.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Ta có: $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Dựa vào đồ thị hàm số $f(x)$, ta có: $f(0) = d = 4$; $f'(x) = mx(x-2), m \neq 0$.

$$\Rightarrow mx(x-2) = 3ax^2 + 2bx + c \Leftrightarrow mx^2 - 2mx = 3ax^2 + 2bx + c \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3a \\ b = -m \\ c = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{m}{3}x^3 - mx^2 + 4, f(2) = 0 \Leftrightarrow \frac{8m}{3} - 4m + 4 = 0 \Leftrightarrow m = 3.$$

$$\Rightarrow f(x) = x^3 - 3x^2 + 4; g(x) = \frac{3}{2}x^4 - x^3 + 2021$$

$$\Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x; g'(x) = 6x^3 - 3x^2$$

$$\Rightarrow y' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \left(f'(\sqrt{1+x^2}) + g'(\sqrt{1+x^2}) \right) = x \left(6(\sqrt{1+x^2})^2 - 6 \right) = 6x^3$$

$$\text{Cho } y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Kết luận: Hàm số $y = f(\sqrt{1+x^2}) + g(\sqrt{1+x^2})$ có 1 cực trị.

Câu 50. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số để phương trình $\log_3(\log_3 x - m) = x + m$ có nghiệm trên khoảng $\left(\frac{1}{3}; 9\right)$?

A. 4 .

B. 5 .

C. 7 .

D. 6 .

Lời giải

Chọn D

Xét phương trình $\log_3(\log_3 x - m) = x + m$ trên khoảng $\left(\frac{1}{3}; 9\right)$

$$\text{Điều kiện: } \log_3 x - m > 0 \Leftrightarrow m \leq \min_{x \in \left(\frac{1}{3}; 9\right)} \{\log_3 x\} = -1$$

$$\text{Ta có: } \log_3(\log_3 x - m) = x + m \Leftrightarrow \log_3 x - m = 3^{x+m}$$

$$\Leftrightarrow \log_3 x + x = x + m + 3^{x+m} \Leftrightarrow \log_3 x + 3^{\log_3 x} = x + m + 3^{x+m}$$

$$\text{Xét hàm số } g(x) = 3^x + x; g'(x) = 3^x \ln 3 + 1 > 0, \forall x$$

$$\Rightarrow g(\log_3 x) = g(x + m) \Leftrightarrow \log_3 x = x + m \Leftrightarrow \log_3 x - x = m$$

$$\text{Xét hàm số } f(x) = \log_3 x - x; f'(x) = \frac{1}{x \ln 3} - 1; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\ln 3}$$

Bảng biến thiên

x	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{\ln 3}$	9
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\frac{4}{3}$	$f\left(\frac{1}{\ln 3}\right)$	-7

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: $m \in \{-6; -5; -4; -3; -2; -1\}$.

Kết luận: Có tất cả 6 giá trị nguyên.

HẾT