

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Môn : TOÁN (CHUYÊN)

Thời gian làm bài: 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Câu 1: (4,0 điểm)

Cho dãy số $(x_n)_{n \geq 1}$ được xác định bởi
$$\begin{cases} x_1 = x_2 = 1 \\ x_{n+1} = x_n^2 \left(1 + \frac{1}{x_{n-1}} \right), \quad n \geq 2 \end{cases}$$

a) Chứng minh rằng $x_n \geq 2^{n-2}$ với mọi $n \geq 1$.

b) Tính giới hạn $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{x_n}{3x_{n+1} + 2} (x_1 + x_2 + \dots + x_n) \right]$.

Câu 2: (3,0 điểm)

Tìm tất cả các đa thức khác hằng $P(x)$, $Q(x)$ với hệ số thực thỏa mãn

$$P((Q(x))^2) = P(x) \cdot (Q(x))^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Câu 3: (4,0 điểm)

a) Cho số nguyên tố p . Chứng minh rằng tồn tại vô số số tự nhiên n thỏa mãn điều kiện

$$2022^n \equiv n + 2023 \pmod{p}.$$

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x; y)$ sao cho $x^4 + 10x^2 + 2^y$ là một số chính phương.

Câu 4: (5,0 điểm)

Trên đường tròn (O) cho dây cung BC cố định không đi qua O và điểm A thay đổi sao cho $A \neq B, A \neq C$. Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BC, CA, AB . Đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là M . Gọi (Ω) là đường tròn đi qua hai điểm D, M và tiếp xúc với đường tròn (O) ; d là tiếp tuyến của (Ω) tại D . Gọi N, P lần lượt là giao điểm của d với các đường trung trực của DE và DF . Gọi H là giao điểm của NE và PF , G là trọng tâm của tam giác ABC .

a) Chứng minh đường tròn (Ω) tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp của tam giác DEF .

b) Chứng minh khi A thay đổi trên (O) thì đường thẳng GH luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 5: (4,0 điểm)

Cho n là một số nguyên dương. Một bảng $n \times n$ gồm n^2 ô vuông đơn vị, mỗi ô được tô bởi một trong hai màu trắng hoặc đen, được gọi là **bảng lỗi** nếu với mỗi ô được tô màu đen thì ô liền kề nằm bên trái nó hoặc bên trên nó (nếu có) đều được tô màu đen. Với a, b là hai ô vuông đơn vị bất kì của bảng, cặp gồm hai ô vuông $(a; b)$ gọi là **cặp đẹp** nếu a được tô màu đen, b được tô màu trắng và cả hai đều nằm trên cùng một hàng hoặc cùng một cột của bảng.

a) Với $n = 3$, hãy chỉ ra **bảng lỗi** 3×3 gồm 6 ô đen và có số **cặp đẹp** lớn nhất.

b) Tìm số **cặp đẹp** lớn nhất có thể của một **bảng lỗi** $n \times n$.

----- Hết -----