

SỞ GD&ĐT THÁI BÌNH



ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 12 THPT

NĂM HỌC 2020 – 2021

Môn thi: TOÁN

Thời gian làm bài: 90 phút (không kể thời gian giao đề)

Đề thi gồm 06 trang & 50 câu trắc nghiệm

- Câu 1.** Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a , mặt bên tạo với mặt đáy góc 30° . Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng
- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{48}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{36}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{72}$.
- Câu 2.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - (2m+1)x^2 + (2m^2 + 2m - 4)x - 2m^2 + 4$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục hoành?
- A. 3. B. 4. C. 6. D. 5.
- Câu 3.** Cho hàm số $y = x^3 + 3mx + 1$ (1) (m là tham số thực, $m \in (-\infty; 0)$). Gọi d là đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số (1). Đường thẳng d cắt đường tròn tâm $I(-1; 0)$ bán kính $R = 3$ tại hai điểm phân biệt A, B . Diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất là
- A. $2\sqrt{7}$. B. $\frac{9}{2}$. C. 6. D. $\sqrt{14}$.
- Câu 4.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện $f(2+x) + f(8-2x) = 3x$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = 4$.
- A. $y = -3x + 15$. B. $y = 3x - 15$. C. $y = -3x + 9$. D. $y = -3x - 9$.
- Câu 5.** Cho cấp số cộng (u_n) có $u_3 + u_{13} = 80$. Tổng 15 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó bằng
- A. 600. B. 630. C. 800. D. 570.
- Câu 6.** Để đủ tiền mua nhà, anh Ba vay ngân hàng 400 triệu đồng theo phương thức lãi kép với lãi suất 0,8%/tháng. Nếu sau mỗi tháng, kể từ ngày vay, anh Ba trả nợ cho ngân hàng số tiền cố định là 10 triệu đồng bao gồm cả lãi vay và tiền gốc. biết rằng lãi suất không thay đổi trong suốt quá trình anh Ba trả nợ. Hỏi sau bao nhiêu tháng thì anh Ba trả hết nợ ngân hàng?
- A. 48. B. 49. C. 47. D. 50.
- Câu 7.** Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $c > b > a > 1$ và $6\log_a^2 b - \log_b^2 c = \log_a \frac{c}{b} - 2\log_b \frac{c}{b} - 1$. Đặt $T = \log_b c - 2\log_a b$. Mệnh đề nào sau đây đúng?
- A. $T \in (2; 5)$. B. $T \in (-3; -1)$. C. $T \in (5; 10)$. D. $T \in (-1; 2)$.
- Câu 8.** Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^2 - 2$ (1). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số (1) có hai điểm cực trị
- A. $-1 < m < 1$. B. $m > -1$. C. $m < 1$. D. $m \neq 0$.
- Câu 9.** Cho phương trình $8^x - m \cdot 2^{2x+1} + (2m^2 - 1) \cdot 2^x + m - m^3 = 0$. Biết tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình trên có ba nghiệm phân biệt là $(a; b)$. Tính $a.b$ bằng?
- A. $a.b = \frac{2}{\sqrt{3}}$. B. $a.b = \frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $a.b = \frac{4}{3}$. D. $a.b = \frac{3}{4}$.

- Câu 10.** Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để phương trình $x^3 - 3x + m + 1 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt, trong đó có hai nghiệm dương?
- A. $-1 < m < 1$. B. $-2 < m < 1$. C. $0 < m < 1$. D. $-1 \leq m < 1$.
- Câu 11.** Gọi A là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 5 chữ số. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập A . Tính xác suất để chọn được số chia hết cho 11 và chữ số hàng đơn vị là số nguyên tố.
- A. $\frac{2045}{13608}$. B. $\frac{409}{11250}$. C. $\frac{409}{90000}$. D. $\frac{409}{3402}$.
- Câu 12.** Tìm hệ số của số hạng chứa x^{10} trong khai triển $f(x) = \left(\frac{1}{4}x^2 + x + 1\right)^2 (x+2)^{3n}$ thành đa thức, với n là số tự nhiên thỏa mãn hệ thức $A_n^3 + C_n^{n-2} = 14n$.
- A. $2^9 C_{19}^{10}$. B. $2^5 C_{19}^{10}$. C. $2^6 C_{19}^{10}$. D. $2^5 C_{19}^{10} x^{10}$.
- Câu 13.** Cho hình nón có góc ở đỉnh bằng 60° và diện tích xung quanh bằng $6\pi a^2$. Tính thể tích V của khối nón đã cho.
- A. $V = \pi a^3$. B. $V = \frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{4}$. C. $V = 3\pi a^3$. D. $V = \frac{3\pi a^3 \sqrt{2}}{4}$.
- Câu 14.** Cho hàm số $y = \frac{3x-2}{2x-3}$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-2; 1]$. Khi đó $M + m$ là
- A. $-\frac{1}{7}$. B. $\frac{15}{7}$. C. $-\frac{15}{7}$. D. $\frac{1}{7}$.
- Câu 15.** Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+2}$ có đồ thị (C) . Gọi $M(a; b)$ là điểm trên (C) có khoảng cách đến đường thẳng $d: y = 3x + 6$ nhỏ nhất. Khẳng định nào sau đây đúng?
- A. $a - b = 2$. B. $a + b = 2$. C. $a + b = -2$. D. $a - b = -2$.
- Câu 16.** Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a , độ dài cạnh bên bằng $4a$. Mặt phẳng $(BCC'B')$ vuông góc với mặt đáy và $\widehat{B'BC} = 30^\circ$. Thể tích khối chóp $A.CC'B$ là:
- A. $\frac{a^3 \sqrt{3}}{12}$. B. $\frac{a^3 \sqrt{3}}{6}$. C. $\frac{a^3 \sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{a^3 \sqrt{3}}{3}$.
- Câu 17.** Cho hình trụ có bán kính đáy bằng R , chiều cao bằng h . Biết rằng hình trụ đó có diện tích toàn phần gấp đôi diện tích xung quanh. Mệnh đề nào sau đây đúng?
- A. $h = R\sqrt{2}$. B. $h = \frac{R}{2}$. C. $h = 2R$. D. $h = R$.
- Câu 18.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và $SA = a$. Gọi E là trung điểm cạnh CD . Mặt cầu đi qua bốn điểm S, A, B, E có bán kính là:
- A. $\frac{a\sqrt{2}}{16}$. B. $\frac{a\sqrt{41}}{16}$. C. $\frac{a\sqrt{41}}{8}$. D. $\frac{a\sqrt{41}}{24}$.
- Câu 19.** Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{6}x^3 + ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) thỏa mãn điều kiện $f(0) = f(1) = f(2)$. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của c để hàm số $g(x) = f(f(x^2 + 2))$ nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$ là
- A. $1 + \sqrt{3}$. B. 1 . C. $\sqrt{3}$. D. $1 - \sqrt{3}$.

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $BC = a$. Biết $SA = a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của A trên SB và SC . Thể tích khối chóp $S.AEF$ bằng

- A. $\frac{a^3}{18}$. B. $\frac{a^3}{24}$. C. $\frac{a^3}{36}$. D. $\frac{a^3}{12}$.

Câu 21. Số nghiệm của phương trình $2^{x^2-x} - 2^{2+x-x^2} = 3$ là

- A. 3. B. 1. C. 2. D. 4.

Câu 22. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	1	0	$+\infty$	

Phương trình $|f(x)| = m$ ($m \in \mathbb{R}$) có bốn nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4 thỏa mãn điều kiện $x_1 < x_2 < x_3 < \frac{1}{2} < x_4$ khi:

- A. $\frac{1}{2} < m < 1$. B. $0 < m < 1$. C. $0 < m \leq 1$. D. $\frac{1}{2} \leq m < 1$.

Câu 23. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m , $m \in [-50; 50)$ sao cho bất phương trình $mx^4 - 2x + m \geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

- A. 1274. B. 1200. C. 1272. D. 1224.

Câu 24. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = g(x) = |x^4 - 4x^2 + m|$ trên đoạn $[-2; 1]$ bằng 2020. Tính tổng các phần tử của S .

- A. 4. B. 5. C. 2020. D. 0.

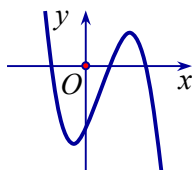
Câu 25. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m sao cho đường thẳng $y = x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ tại hai điểm phân biệt A, B và $AB \leq 4$.

- A. 2. B. 0. C. 3. D. 1.

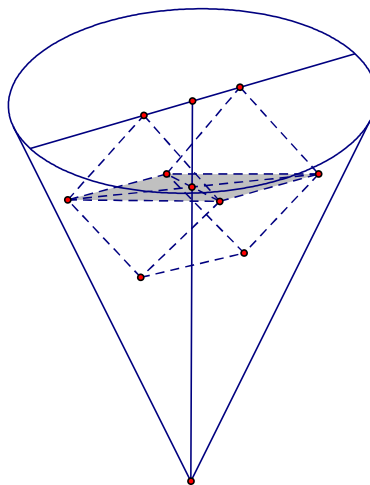
Câu 26. Tập xác định của hàm số $y = \left(\frac{4x-3x^2}{2x^2+3x+1} \right)^{-\frac{2}{3}}$ là:

- A. $D = \left(-1; \frac{4}{3} \right)$. B. $D = \left(-1; -\frac{1}{2} \right) \cup \left(0; \frac{4}{3} \right)$.
C. $D = \left[-1; -\frac{1}{2} \right] \cup \left[0; \frac{4}{3} \right]$. D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -1; -\frac{1}{2}; 0; \frac{4}{3} \right\}$.

Câu 27. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình dưới đây. Trong các giá trị a, b, c, d có bao nhiêu giá trị dương?



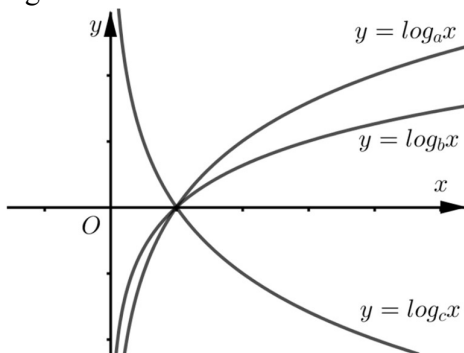
- A. 4.** **B. 1.** **C. 2.** **D. 3.**
- Câu 28.** Một khối gạch hình lập phương (không thấm nước) có cạnh bằng 2 được đặt vào trong một chiếc phễu hình nón đầy nước theo cách như sau: Một cạnh của viên gạch nằm trên mặt nước (nằm trên một đường kính của mặt đáy hình nón), các đỉnh còn lại nằm trên mặt nón, tâm của viên gạch nằm trên trục hình nón (như hình vẽ). Tính thể tích nước còn lại trong phễu (làm tròn đến hai chữ số thập phân)



- A. $V = 22,10$.** **B. $V = 22,27$.** **C. $V = 20,64$.** **D. $V = 22,30$.**
- Câu 29.** Cho khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng 12, đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O . Thể tích khối chóp $A'.BCO$ bằng
- A. 3.** **B. 1.** **C. 2.** **D. 4.**
- Câu 30.** Cho hai số thực a, b thỏa mãn điều kiện $3a - 4 > b > 0$. Tính tổng $S = a + 2b$ khi biểu thức
- $$P = \log_a \left(\frac{a^3}{4b} \right) + \frac{3}{16} \left(\log_{\frac{3a}{4+b}} a \right)^2$$
- đạt giá trị nhỏ nhất
- A. $S = 10$.** **B. $S = 11$.** **C. $S = 12$.** **D. $S = 8$.**
- Câu 31.** Hàm số $y = \log_{0,5}(-x^2 + 2x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?
- A. $(1; +\infty)$.** **B. $(0; 1)$.** **C. $(-\infty; 1)$.** **D. $(1; 2)$.**
- Câu 32.** Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = 5a, BC = 6a, CA = 7a$. Các mặt bên $(SAB), (SBC)$ và (SCA) cùng tạo với mặt phẳng đáy một góc 60° . Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) thuộc miền trong tam giác ABC . Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.
- A. $8a^3\sqrt{3}$.** **B. $4a^3\sqrt{3}$.** **C. $\frac{8a^3\sqrt{3}}{3}$.** **D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.**
- Câu 33.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = x^4 - 2(m-1)x^2 + m + 2020$ đồng biến trên khoảng $(-3; -1)$.
- A. $m < 10$.** **B. $m \leq 10$.** **C. $m > 10$.** **D. $m \geq 10$.**
- Câu 34.** Cho tập A có 20 phần tử. Hỏi tập A có bao nhiêu tập con khác rỗng mà có số phần tử chẵn?
- A. 2^{19} .** **B. $2^{19} - 1$.** **C. $2^{20} + 1$.** **D. 2^{20} .**
- Câu 35.** Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $AB = AC = 2a$ và $BC = 2a\sqrt{3}$. Tam giác $A'BC$ vuông cân tại A' và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy (ABC) . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC .

- A. $a\sqrt{3}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Câu 36. Cho ba số dương a, b, c khác 1. Đồ thị các hàm số $y = \log_a x, y = \log_b x, y = \log_c x$ như hình vẽ dưới đây. Tìm khẳng định đúng:



- A. $c < b < a$. B. $c < a < b$. C. $a < c < b$. D. $b < a < c$.
- Câu 37.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{1-x}}{x^2 + 4x + m}$ có đúng ba đường tiệm cận?
- A. 9. B. 7. C. 10. D. 8.
- Câu 38.** Hàm số $y = -x^4 + 4x^3 - 2$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây ?
- A. $(3; +\infty)$. B. $(4; +\infty)$. C. $(-\infty; 4)$. D. $(-\infty; 3)$.
- Câu 39.** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = AC = a; BC = a\sqrt{2}$. Góc giữa hai đường thẳng AB và SC bằng
- A. 90° . B. 30° . C. 60° . D. 45° .
- Câu 40.** Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , cạnh $BC = a\sqrt{6}$. Góc giữa mặt phẳng $(AB'C)$ và mặt phẳng $BCC'B'$ bằng 60° . Tính thể tích khối đa diện $AA'B'C'C$.
- A. $a^3\sqrt{3}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{2}$.
- Câu 41.** Cho hệ phương trình $\begin{cases} 9x^2 - 4y^2 = 5 \\ \log_m(3x+2y) - \log_3(3x-2y) = 1 \end{cases}$ (tham số $m \in \mathbb{R}$) có nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn $3x+2y \leq 5$. Khi đó giá trị lớn nhất của m là:
- A. $\log_5 3$. B. $\log_3 5$. C. 5. D. 4.
- Câu 42.** Cho khối chóp $S.ABC$ có thể tích là $\frac{a^3}{3}$. Tam giác SAB có diện tích là $2a^2$. Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) .
- A. $d = \frac{a}{2}$. B. $d = 2a$. C. a . D. $d = \frac{2a}{3}$.
- Câu 43.** Cho hàm số $f(x) = |2x^4 - 8x^3 - 16x^2 + 1 - m|$ (m là tham số). Biết rằng khi m thay đổi thì số điểm cực trị của hàm số có thể là a hoặc b hoặc c . Giá trị $a+b+c$ bằng
- A. 12. B. 16. C. 15. D. 13.
- Câu 44.** Ba chiếc bình hình trụ cùng chứa một lượng nước như nhau, độ cao mực nước trong bình II gấp đôi bình I và trong bình III gấp đôi bình II. Chọn nhận xét đúng về bán kính đáy r_1, r_2, r_3 của ba bình I, II, III.

- A. r_1, r_2, r_3 theo thứ tự lập thành một cấp số nhân công bội $\frac{1}{2}$.
- B. r_1, r_2, r_3 theo thứ tự lập thành một cấp số nhân công bội $\sqrt{2}$.
- C. r_1, r_2, r_3 theo thứ tự lập thành một cấp số nhân công bội $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
- D. r_1, r_2, r_3 theo thứ tự lập thành một cấp số nhân công bội 2.
- Câu 45.** Với m là tham số thực dương khác 1. Hãy tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_m(2x^2 + x + 3) \leq \log_m(3x^2 - x)$. Biết rằng bất phương trình có một nghiệm là $x = 1$.
- A. $S = [-1; 0) \cup \left(\frac{1}{3}; 3\right]$.
- B. $S = [-1; 3]$.
- C. $S = (-1; 0) \cup \left(\frac{1}{3}; 3\right]$.
- D. $S = (-1; 0) \cup (1; 3]$.
- Câu 46.** Cho mặt cầu (S) tâm O . Các điểm A, B, C nằm trên mặt cầu (S) sao cho $AB = 3, AC = 4, BC = 5$ và khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC) bằng 1. Thể tích của khối cầu (S) bằng
- A. $\frac{20\sqrt{5}\pi}{3}$.
- B. $\frac{29\sqrt{29}\pi}{6}$.
- C. $\frac{13\sqrt{3}\pi}{6}$.
- D. $\frac{7\sqrt{21}\pi}{2}$.
- Câu 47.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , $AB = BC = \frac{1}{2}AD = a$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Thể tích của khối chóp $S.ACD$ bằng
- A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.
- B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.
- C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.
- D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.
- Câu 48.** Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{|x-2|-1}{2x+3}$ là
- A. 1.
- B. 2.
- C. 3.
- D. 4.
- Câu 49.** Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = a, AC = a\sqrt{5}, \widehat{DAB} = \widehat{CBD} = 90^\circ, \widehat{ABC} = 135^\circ$. Biết góc giữa hai mặt phẳng (ABD) và (BCD) bằng 30° . Thể tích khối tứ diện $ABCD$ bằng
- A. $\frac{a^3}{\sqrt{2}}$.
- B. $\frac{a^3}{3\sqrt{2}}$.
- C. $\frac{a^3}{2\sqrt{3}}$.
- D. $\frac{a^3}{6}$.
- Câu 50.** Tập nghiệm của bất phương trình $9^x - 2(x+5)3^x + 9(2x+1) \geq 0$ là $S = [a; b] \cup [c; +\infty)$. Khi đó $a + b + c$ bằng:
- A. 4.
- B. 1.
- C. 5.
- D. 3.

HẾT



**ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 12 THPT
NĂM HỌC 2020 – 2021**

Môn thi: TOÁN

Thời gian làm bài: 90 phút (không kể thời gian giao đề)

Đề thi gồm 06 trang & 50 câu trắc nghiệm



BẢNG ĐÁP ÁN

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
D	A	D	A	A	B	D	D	A	A	B	B	C	D	B	B	D	C	B	C	C	A	D	A	D
26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
B	C	B	B	D	D	A	D	B	B	B	A	D	C	A	C	D	C	C	A	B	C	C	D	D

PHẦN LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a , mặt bên tạo với mặt đáy góc 30° . Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{48}$.

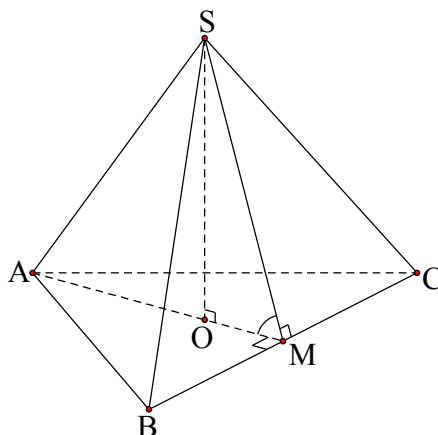
B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{36}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{72}$.

Lời giải

Chọn D



Góc giữa mặt bên (SBC) và đáy (ABC) bằng góc $\widehat{SMO} = 30^\circ$.

Ta có $OM = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Tam giác SOM vuông tại O nên $SO = OM \cdot \tan 30^\circ = \frac{a}{6}$.

$$S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$V_{SABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a}{6} = \frac{a^3\sqrt{3}}{72}.$$

Câu 2. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - (2m+1)x^2 + (2m^2+2m-4)x - 2m^2+4$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục hoành?

A. 3.

B. 4.

C. 6.

D. 5.

Lời giải

Chọn A

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục hoành

$$\Leftrightarrow x^3 - (2m+1)x^2 + (2m^2 + 2m - 4)x - 2m^2 + 4 = 0 \text{ có 3 nghiệm phân biệt}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 2mx + 2m^2 - 4) = 0 \text{ có 3 nghiệm phân biệt}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2mx + 2m^2 - 4 = 0 \text{ có 2 nghiệm phân biệt đều khác 1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - (2m^2 - 4) > 0 \\ 1 - 2m + 2m^2 - 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - m^2 > 0 \\ 2m^2 - 2m - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ m \neq \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2} \end{cases} \text{ mà } m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-1; 0; 1\}$$

Câu 3. Cho hàm số $y = x^3 + 3mx + 1$ (1) (m là tham số thực, $m \in (-\infty; 0)$). Gọi d là đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số (1). Đường thẳng d cắt đường tròn tâm $I(-1; 0)$ bán kính $R = 3$ tại hai điểm phân biệt A, B . Diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất là

A. $2\sqrt{7}$.

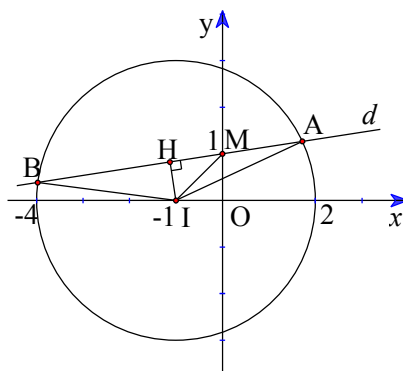
B. $\frac{9}{2}$.

C. 6.

D. $\sqrt{14}$.

Lời giải

Chọn D



Tập xác định: $\mathbb{R}$

$$y' = 3x^2 + 3m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 1 \\ x = -m \Rightarrow y = -m^3 - 3m^2 + 1 \end{cases}$$

Với $m \in (-\infty; 0)$ thì đồ thị hàm số (1) luôn có hai điểm cực trị.

+ Gọi $M(x; y)$ là điểm cố định của đường thẳng d .

Khi đó phương trình $(m^2 + 3)x - y + 1 = 0$ nghiệm đúng với mọi m

$$\Leftrightarrow m^2x + 3x - y + 1 = 0, \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3x - y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow d \text{ luôn luôn đi qua điểm } M(1; 0)$$

Gọi H là trung điểm $AB \Rightarrow IH \perp AB$

$$S_{\Delta IAB} = \frac{1}{2} \cdot IH \cdot AB = IH \cdot AH = IH \sqrt{9 - IH^2}.$$

$$\text{Ta thấy } IH \leq IM = \sqrt{2} \Rightarrow S_{\Delta IAB} \leq \sqrt{14} \Rightarrow \max S_{\Delta IAB} = \sqrt{14}.$$

Chọn đáp án

D.

- Câu 4.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện $f(2+x) + f(8-2x) = 3x$.
Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = 4$.
A. $y = -3x + 15$. **B.** $y = 3x - 15$. **C.** $y = -3x + 9$. **D.** $y = -3x - 9$.

Lời giải

Chọn A

Vì $f(2+x) + f(8-2x) = 3x$ (1) nên $f'(2+x) - 2f'(8-2x) = 3$ (2).

Thay $x = 2$ vào (1); (2) ta được

$$\begin{cases} f(4) + f(4) = 6 \\ f'(4) - 2f'(4) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(4) = 3 \\ f'(4) = -3 \end{cases}$$

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = 4$ là

$$y = f'(4) \cdot (x - 4) + f(4) = -3(x - 4) + 3 = -3x + 15.$$

Vậy phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = 4$ là $y = -3x + 15$.

- Câu 5.** Cho cấp số cộng (u_n) có $u_3 + u_{13} = 80$. Tổng 15 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó bằng
A. 600. **B.** 630. **C.** 800. **D.** 570.

Lời giải

Chọn A

Gọi công sai của cấp số cộng (u_n) là d .

$$\text{Tổng 15 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó bằng } S_{15} = \frac{(2u_1 + 14d) \cdot 15}{2} = 15(u_1 + 7d).$$

$$u_3 + u_{13} = 80 \Rightarrow u_1 + 2d + u_1 + 12d = 80 \Leftrightarrow u_1 + 7d = 40.$$

$$\text{Vậy } S_{15} = 15 \cdot 40 = 600.$$

- Câu 6.** Để đủ tiền mua nhà, anh Ba vay ngân hàng 400 triệu đồng theo phương thức lãi kép với lãi suất 0,8%/tháng. Nếu sau mỗi tháng, kể từ ngày vay, anh Ba trả nợ cho ngân hàng số tiền cố định là 10 triệu đồng bao gồm cả lãi vay và tiền gốc. biết rằng lãi suất không thay đổi trong suốt quá trình anh Ba trả nợ. Hỏi sau bao nhiêu tháng thì anh Ba trả hết nợ ngân hàng?
A. 48. **B.** 49. **C.** 47. **D.** 50.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Số tiền còn nợ sau 1 tháng là } T_1 = 400 \cdot (1 + 0,8\%) - 10.$$

$$\text{Số tiền còn nợ sau 2 tháng là } T_2 = 400 \cdot (1 + 0,8\%)^2 - 10(1 + 0,8\%) - 10.$$

...

Số tiền còn nợ sau n tháng là

$$\begin{aligned} T_n &= 400 \cdot (1 + 0,8\%)^n - 10(1 + 0,8\%)^{n-1} - \dots - 10 \\ &= 400(1 + 0,8\%)^n - 10 \cdot [1 + (1 + 0,8\%) + \dots + (1 + 0,8\%)^{n-1}] \\ &= 400(1 + 0,8\%)^n - 10 \cdot \frac{(1 + 0,8\%)^n - 1}{0,8\%} = -850(1 + 0,8\%)^n + 1250 \end{aligned}$$

$$T_n = 0 \Leftrightarrow (1 + 0,8\%)^n = \frac{25}{17} \Leftrightarrow n \approx 48,4.$$

Vậy sau 49 tháng thì anh Ba trả hết nợ.

- Câu 7.** Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $c > b > a > 1$ và $6\log_a^2 b - \log_b^2 c = \log_a \frac{c}{b} - 2\log_b \frac{c}{b} - 1$. Đặt $T = \log_b c - 2\log_a b$. Mệnh đề nào sau đây đúng?
- A. $T \in (2; 5)$. B. $T \in (-3; -1)$. C. $T \in (5; 10)$. **D. $T \in (-1; 2)$.**

Lời giải

Chọn D

Đặt $x = \log_a b; y = \log_b c \Rightarrow xy = \log_a c$. Khi đó

$$6\log_a^2 b - \log_b^2 c = \log_a \frac{c}{b} - 2\log_b \frac{c}{b} - 1 \Rightarrow 6x^2 - y^2 = xy - x - 2y + 1 \quad (1)$$

$$\text{Và } T = \log_b c - 2\log_a b = y - 2x.$$

$$\text{Ta có } (1) \Leftrightarrow 6x^2 + (1-y)x - (1-y)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-y=3x \\ 1-y=-2x \end{cases} \Rightarrow T = y - 2x = 1.$$

- Câu 8.** Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^2 - 2$ (1). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số (1) có hai điểm cực trị
- A. $-1 < m < 1$. B. $m > -1$. C. $m < 1$. **D. $m \neq 0$.**

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } y' = 3x^2 - 6mx.$$

$$\text{Hàm số (1) có hai điểm cực trị} \Leftrightarrow y' = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt} \Leftrightarrow 9m^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 0.$$

- Câu 9.** Cho phương trình $8^x - m \cdot 2^{2x+1} + (2m^2 - 1) \cdot 2^x + m - m^3 = 0$. Biết tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình trên có ba nghiệm phân biệt là $(a; b)$. Tính $a.b$ bằng?

A. $a.b = \frac{2}{\sqrt{3}}$. B. $a.b = \frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $a.b = \frac{4}{3}$. D. $a.b = \frac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Phương trình } 8^x - m \cdot 2^{2x+1} + (2m^2 - 1) \cdot 2^x + m - m^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 8^x - 2m \cdot 2^{2x} + (2m^2 - 1) \cdot 2^x + m - m^3 = 0 \quad (1).$$

$$\text{Đặt } t = 2^x \text{ điều kiện } t > 0.$$

$$\text{Khi đó phương (1) trở thành } t^3 - 2mt^2 + (2m^2 - 1)t + m - m^3 = 0.$$

$$\Leftrightarrow (t-m)(t^2 - mt + m^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = m \\ t^2 - mt + m^2 - 1 = 0(*) \end{cases}$$

Để phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m > 0$ và phương trình (*) có hai nghiệm dương phân biệt khác m

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4m^2 + 4 > 0 \\ m^2 - 1 \neq 0 \\ m > 0 \\ m^2 - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < \frac{2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow m \in \left(1; \frac{2}{\sqrt{3}}\right) \Rightarrow a.b = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

- Câu 10.** Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để phương trình $x^3 - 3x + m + 1 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt, trong đó có hai nghiệm dương?
- A. $-1 < m < 1$.** B. $-2 < m < 1$. C. $0 < m < 1$. D. $-1 \leq m < 1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $x^3 - 3x + m + 1 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x + 1 = -m$.

Số nghiệm phương trình đã cho chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ và đường thẳng $y = -m$.

Yêu cầu bài toán tương đương đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ cắt đường thẳng $y = -m$ tại ba điểm phân biệt trong đó có hai điểm có hoành độ dương.

Bảng biến thiên của hàm số $y = x^3 - 3x + 1$.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y							
	$-\infty$		3		-1		$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta suy ra giá trị của tham số m thỏa mãn là $-1 < m < 1$.

Câu 11. Gọi A là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 5 chữ số. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập A . Tính xác suất để chọn được số chia hết cho 11 và chữ số hàng đơn vị là số nguyên tố.

A. $\frac{2045}{13608}$.

B. $\frac{409}{11250}$.

C. $\frac{409}{90000}$.

D. $\frac{409}{3402}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi số cần tìm có dạng $\overline{abcde} = 11k, k \in \mathbb{N}$.

Số cách chọn số có 5 chữ số từ tập số tự nhiên là: $n(\Omega) = 9 \cdot 10^4$.

Gọi X là biến cố: “Chọn được số chia hết cho 11 và chữ số hàng đơn vị là số nguyên tố”.

Do chữ số tận cùng là số nguyên tố nên $e \in \{2; 3; 5; 7\}$.

Suy ra k có tận cùng là $2; 3; 5; 7$.

Ta có số cần tìm có 5 chữ số nên $10010 \leq 11k \leq 99990 \Leftrightarrow 910 \leq k \leq 9090$.

Xét các bộ số $(910; 911; \dots; 919); (920; 921; \dots; 929); \dots (9080; 9081; \dots; 9089)$.

Số các bộ là $\frac{9090 - 910}{10} = 818$ bộ.

Mỗi bộ số sẽ có 4 số k thỏa mãn. Do đó, $n(X) = 818 \cdot 4 = 3272$.

Xác suất của biến cố X là $P(X) = \frac{3272}{9 \cdot 10^4} = \frac{409}{11250}$.

Câu 12. Tìm hệ số của số hạng chứa x^{10} trong khai triển $f(x) = \left(\frac{1}{4}x^2 + x + 1\right)^2 (x+2)^{3n}$ thành đa thức,

với n là số tự nhiên thỏa mãn hệ thức $A_n^3 + C_n^{n-2} = 14n$.

A. $2^9 C_{19}^{10}$.

B. $2^5 C_{19}^{10}$.

C. $2^6 C_{19}^{10}$.

D. $2^5 C_{19}^{10} x^{10}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $A_n^3 + C_n^{n-2} = 14n \Leftrightarrow n(n-1)(n-2) + \frac{n(n-1)}{2} = 14n \Leftrightarrow 2n^2 - 5n - 25 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 5 \\ n = -\frac{5}{2} \end{cases}$.

Mà $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n = 5$.

Xét khai triển $f(x) = \left(\frac{1}{4}x^2 + x + 1\right)^2 (x+2)^{15} = \left(\frac{x}{2} + 1\right)^4 (x+2)^{15} = \frac{1}{16} \cdot (x+2)^{19} = \frac{1}{16} \cdot (2+x)^{19}$.

Ta có số hạng tổng quát của khai triển $(2+x)^{19}$ là $C_{19}^k 2^{19-k} x^k$.

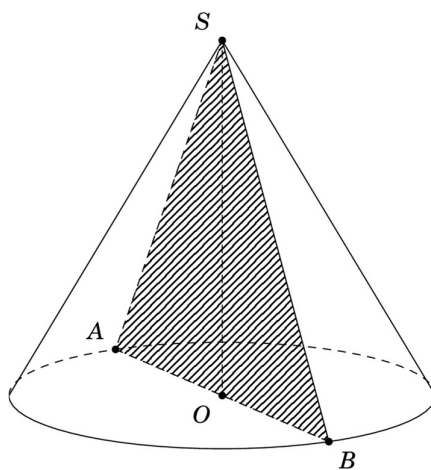
Từ đó, hệ số của số hạng chứa x^{10} trong khai triển đã cho bằng $\frac{1}{16} \cdot C_{19}^{10} \cdot 2^9 = 2^5 C_{19}^{10}$.

Câu 13. Cho hình nón có góc ở đỉnh bằng 60° và diện tích xung quanh bằng $6\pi a^2$. Tính thể tích V của khối nón đã cho.

- A. $V = \pi a^3$. B. $V = \frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{4}$. **C. $V = 3\pi a^3$.** D. $V = \frac{3\pi a^3 \sqrt{2}}{4}$.

Lời giải

Chọn C



Giả sử hình nón đã cho có đỉnh S , đường tròn đáy tâm O và thiết diện qua trục là tam giác SAB cân tại S như hình vẽ.

Từ giả thiết, suy ra $\widehat{ASB} = 60^\circ$, do đó SAB là tam giác đều.

Mặt khác $\pi \cdot OB \cdot SB = 6\pi a^2 \Leftrightarrow OB \cdot 2OB = 6a^2 \Leftrightarrow OB = a\sqrt{3} \Rightarrow SO = 3a$.

Thể tích khối nón $V = \frac{1}{3} \pi \cdot OB^2 \cdot SO = \frac{1}{3} \pi \cdot (a\sqrt{3})^2 \cdot 3a = 3\pi a^3$.

Câu 14. Cho hàm số $y = \frac{3x-2}{2x-3}$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-2; 1]$. Khi đó $M + m$ là

- A. $-\frac{1}{7}$. B. $\frac{15}{7}$. C. $-\frac{15}{7}$. **D. $\frac{1}{7}$.**

Lời giải

Chọn D

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $[-2; 1]$.

Ta có $y' = \frac{-5}{(2x-3)^2} < 0, \forall x \in [-2; 1]$ nên hàm số nghịch biến trên $[-2; 1]$.

$\Rightarrow M = y(-2) = \frac{8}{7}, m = y(1) = -1$.

Suy ra $M + m = \frac{1}{7}$.

Câu 15. Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+2}$ có đồ thị (C) . Gọi $M(a;b)$ là điểm trên (C) có khoảng cách đến đường thẳng $d: y = 3x + 6$ nhỏ nhất. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $a - b = 2$.

B. $a + b = 2$.

C. $a + b = -2$.

D. $a - b = -2$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } y = \frac{2x+1}{x+2} = \frac{2(x+2)-3}{x+2} = 2 - \frac{3}{x+2}.$$

$$\text{Gọi } M \in (C) \Rightarrow M\left(a; 2 - \frac{3}{a+2}\right), (a \neq -2).$$

$$\text{Ta có } y = 3x + 6 \Leftrightarrow 3x - y + 6 = 0(d).$$

Ta có khoảng cách từ M đến (d) là

$$d(M, d) = \frac{\left| 3a - \left(2 - \frac{3}{a+2} \right) + 6 \right|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \left| 3a + \frac{3}{a+2} + 4 \right| = \frac{1}{\sqrt{10}} \left| 3(a+2) + \frac{3}{a+2} - 2 \right| \geq \frac{2\sqrt{10}}{5}.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } a = 1 \Rightarrow M(1; 1) \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow a + b = 2.$$

Câu 16. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a , độ dài cạnh bên bằng $4a$. Mặt phẳng $(BCC'B')$ vuông góc với mặt đáy và $\widehat{B'BC} = 30^\circ$. Thể tích khối chóp $A.CC'B$ là:

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

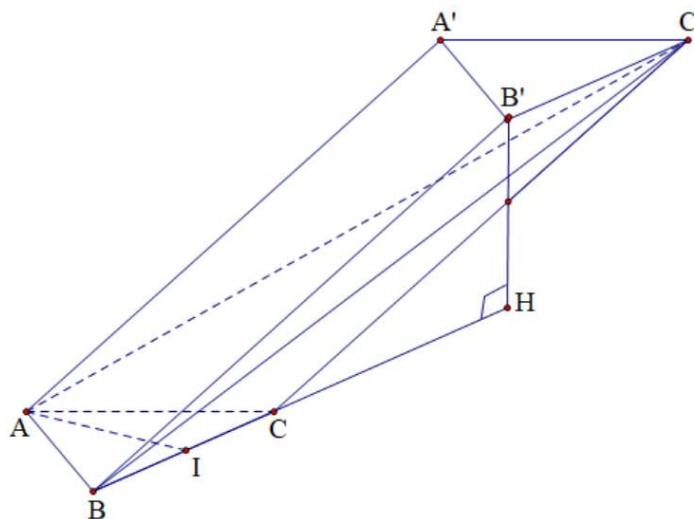
B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn B



$$\text{Kẻ } B'H \perp BC \Rightarrow \begin{cases} B'H \perp (ABC) \\ B'H = \frac{BB'}{2} = 2a \end{cases}.$$

Gọi I là trung điểm BC .

$$\begin{cases} AI \perp BC \\ AI \perp B'H \end{cases} \Rightarrow AI \perp (CC'B).$$

$$S_{\Delta CC'B} = \frac{1}{2} BC \cdot B'H = \frac{1}{2} a \cdot 2a = a^2.$$

$$V_{A.CC'B} = \frac{1}{3} AI \cdot S_{\Delta CC'B} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} a^2 = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}.$$

Câu 17. Cho hình trụ có bán kính đáy bằng R , chiều cao bằng h . Biết rằng hình trụ đó có diện tích toàn phần gấp đôi diện tích xung quanh. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $h = R\sqrt{2}$.

B. $h = \frac{R}{2}$.

C. $h = 2R$.

D. $h = R$.

Lời giải

Chọn D

$$S_{tp} = 2S_{xq} \Leftrightarrow S_{xq} + 2S_{đáy} = 2S_{xq}.$$

$$\Leftrightarrow S_{xq} = 2S_{đáy} \Leftrightarrow 2\pi Rh = 2\pi R^2 \Leftrightarrow h = R.$$

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và $SA = a$. Gọi E là trung điểm cạnh CD . Mặt cầu đi qua bốn điểm S, A, B, E có bán kính là:

A. $\frac{a\sqrt{2}}{16}$.

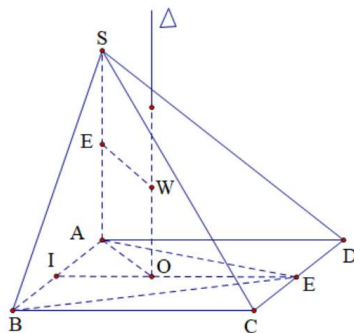
B. $\frac{a\sqrt{41}}{16}$.

C. $\frac{a\sqrt{41}}{8}$.

D. $\frac{a\sqrt{41}}{24}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔEAB .

Gọi Δ là đường thẳng qua O và vuông góc với mặt phẳng (EAB) .

Gọi E là trung điểm cạnh SA .

Trong (SA, Δ) gọi W là giao điểm của Δ với đường trung trực cạnh SA .

$\Rightarrow W$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABE$, bán kính $R = WA$.

$$S_{\Delta ABE} = \frac{1}{2} AB \cdot EI = \frac{1}{2} a^2.$$

$$EA = EB = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

$$S_{\Delta ABE} = \frac{EA \cdot EB \cdot AB}{4R_{(EAB)}} \Rightarrow R_{(EAB)} = \frac{EA \cdot EB \cdot AB}{4S_{\Delta ABE}} = \frac{\frac{a\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2} \cdot a}{4 \cdot \frac{a^2}{2}} = \frac{5a}{8}.$$

$$\Rightarrow AO = \frac{5a}{8}.$$

$$\text{Tứ giác } AEW O \text{ là hình chữ nhật} \Rightarrow WA = \sqrt{AO^2 + AE^2} = \sqrt{\frac{25a^2}{64} + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{41}}{8} \Rightarrow R = \frac{a\sqrt{41}}{8}.$$

Câu 19. Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{6}x^3 + ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) thỏa mãn điều kiện $f(0) = f(1) = f(2)$.

Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của c để hàm số $g(x) = f(f(x^2 + 2))$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$ là

A. $1 + \sqrt{3}$.

B. 1.

C. $\sqrt{3}$.

D. $1 - \sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(0) = c \\ f(1) = a + b + c + \frac{1}{6} \\ f(2) = 4a + 2b + c + \frac{4}{3} \end{cases}.$$

$$\text{Vì } f(0) = f(1) = f(2) \Rightarrow \begin{cases} a + b = -\frac{1}{6} \\ 4a + 2b = -\frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x + c.$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{3}.$$

$$\text{Ta có } g'(x) = 2x \cdot f'(x^2 + 2) \cdot f'(f(x^2 + 2))$$

$$\text{Hàm số } g(x) \text{ nghịch biến trên khoảng } (0;1) \Leftrightarrow g'(x) \leq 0, \forall x \in (0;1).$$

$$\text{Nhận xét: } f'(x) \leq 0 \text{ thì } x \in \left[1 - \frac{\sqrt{3}}{3}; 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right] \supset (0;1) \text{ nên } \forall x \in (0;1) \text{ thì } \begin{cases} 2x > 0 \\ f'(x^2 + 2) > 0 \end{cases}.$$

$$\Rightarrow g'(x) \leq 0, \forall x \in (0;1) \text{ khi } f'(f(x^2 + 2)) \leq 0, \forall x \in (0;1).$$

$$\text{Lại có } \forall x \in (0;1) \Rightarrow x^2 + 2 \in (2;3) \Rightarrow f(2) < f(x^2 + 2) < f(3).$$

$$\text{Suy ra } 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \leq f(2) < f(3) \leq 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \begin{cases} f(2) \geq 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \\ f(3) \leq 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c \geq 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \\ c \leq \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \Rightarrow c \in \left[1 - \frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$$

$$\Rightarrow \min c + \max c = 1.$$

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $BC = a$. Biết $SA = a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của A trên SB và SC . Thể tích khối chóp $S.AEF$ bằng

A. $\frac{a^3}{18}$.

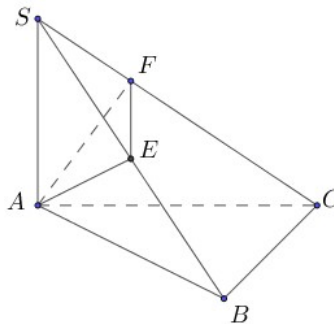
B. $\frac{a^3}{24}$.

C. $\frac{a^3}{36}$.

D. $\frac{a^3}{12}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $V_{S.ABC} = \frac{1}{6} SA.AB.BC = \frac{a^3}{6}$.

Tam giác ABC vuông cân tại $B \Rightarrow AC = a\sqrt{2}$.

Tam giác SAC vuông tại A , có $AF \perp SC \Rightarrow \frac{SF}{SC} = \frac{SA^2}{SC^2} = \frac{1}{3}, \frac{SE}{SB} = \frac{1}{2}$.

Lại có $\frac{V_{S.AEF}}{V_{S.ABC}} = \frac{SE}{SB} \cdot \frac{SF}{SC} = \frac{1}{6} \Rightarrow V_{S.AEF} = \frac{1}{6} V_{S.ABC} = \frac{a^3}{36}$.

Câu 21. Số nghiệm của phương trình $2^{x^2-x} - 2^{2+x-x^2} = 3$ là

A. 3.

B. 1.

C. 2.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

Đặt $2^{x^2-x} = t, t > 0$.

Phương trình đã cho trở thành $t - \frac{4}{t} = 3 \Leftrightarrow t^2 - 3t - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1(l) \\ t = 4(tm) \end{cases}$.

Với $t = 4 \Leftrightarrow 2^{x^2-x} = 4 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$.

Vậy phương trình có 2 nghiệm $x = -1$ và $x = 2$.

Câu 22. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	1	0	$+\infty$	

Phương trình $|f(x)| = m$ ($m \in \mathbb{R}$) có bốn nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4 thỏa mãn điều kiện

$x_1 < x_2 < x_3 < \frac{1}{2} < x_4$ khi:

A. $\frac{1}{2} < m < 1$.

B. $0 < m < 1$.

C. $0 < m \leq 1$.

D. $\frac{1}{2} \leq m < 1$.

Lời giải

Chọn A

Để ý rằng, do tính đối xứng của đồ thị hàm số bậc ba ta suy ra được tâm đối xứng (hay điểm uốn) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là $I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ ta suy ra bảng biến thiên của hàm số $y = |f(x)|$ như sau:

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
$y = f(x) $	$+\infty$	1	$\frac{1}{2}$	0	$+\infty$

Vậy, dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y = |f(x)|$ ta có: $\frac{1}{2} < m < 1$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 23. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m , $m \in [-50; 50)$ sao cho bất phương trình $mx^4 - 2x + m \geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

A. 1274.

B. 1200.

C. 1272.

D. 1224.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $mx^4 - 2x + m \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m(x^4 + 1) \geq 2x, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \geq \frac{2x}{x^4 + 1} = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Xét hàm số $f(x) = \frac{2x}{x^4 + 1}$ trên $\mathbb{R}$. Ta có: $f'(x) = \frac{-6x^4 + 2}{(x^4 + 1)^2}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$.

Bảng biến thiên của $f(x)$:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	0	$-\frac{\sqrt[4]{27}}{2}$	$\frac{\sqrt[4]{27}}{2}$	0	

Dựa vào bảng biến thiên của $f(x)$ ta suy ra: $m \geq \frac{2x}{x^4 + 1} = f(x), \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \geq \frac{\sqrt[4]{27}}{2} \approx 1,13975$.

Vì $m \in \mathbb{Z}, m \in [-50; 50)$ nên $m \in \{2; 3; 4; \dots; 49\}$.

Khi đó tổng tất cả các giá trị của tham số m là: $S = 2 + 3 + 4 + \dots + 49 = \frac{48 \cdot 51}{2} = 1224$.

Câu 24. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = g(x) = |x^4 - 4x^2 + m|$ trên đoạn $[-2; 1]$ bằng 2020. Tính tổng các phần tử của S .

A. 4.

B. 5.

C. 2020.

D. 0.

Lời giải

Chọn A

Xét $f(x) = x^4 - 4x^2 + m$ liên tục trên $[-2; 1]$ ta có:

$$\min_{[-2;1]} f(x) = f(-\sqrt{2}) = m - 4; \max_{[-2;1]} f(x) = f(-2) = f(0) = m.$$

$$\text{Suy ra: } \max_{[-2;1]} g(x) = \max_{[-2;1]} |f(x)| = \max\{|m|; |m-4|\}.$$

● Trường hợp 1: $|m| \geq |m-4|$, (*).

$$\text{Khi đó: } \max_{[-2;1]} g(x) = |m| = 2020 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2020 \\ m = -2020 \end{cases}. \text{ Kiểm tra điều kiện (*) ta được } m = 2020.$$

● Trường hợp 2: $|m| < |m-4|$, (**).

$$\text{Khi đó: } \max_{[-2;1]} g(x) = |m-4| = 2020 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2024 \\ m = -2016 \end{cases}. \text{ Kiểm tra điều kiện (**) ta được } m = -2016.$$

Vậy tổng các phần tử của S là: $2020 + (-2016) = 4$.

Câu 25. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m sao cho đường thẳng $y = x + m$ cắt đồ thị hàm số

$$y = \frac{2x-1}{x+1} \text{ tại hai điểm phân biệt } A, B \text{ và } AB \leq 4.$$

A. 2.

B. 0.

C. 3.

D. 1.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Phương trình hoành độ giao điểm là } \frac{2x-1}{x+1} = x + m, x \neq -1.$$

$$\Leftrightarrow f(x) = x^2 + (m-1)x + m + 1 = 0. \quad (1)$$

Để đường thẳng cắt đồ thị hàm số đã cho tại hai điểm phân biệt thì phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt khác -1 .

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ f(-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 6m - 3 > 0 \\ 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 + 2\sqrt{3} \\ m < 3 - 2\sqrt{3} \end{cases} \quad (2).$$

Gọi hai điểm phân biệt là $A(x_1; x_1 + m)$, $B(x_2; x_2 + m)$, với x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của phương trình (*).

$$\begin{aligned} \text{Ta có } AB &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (x_2 - x_1)^2} = \sqrt{2(x_2 - x_1)^2} \\ &= \sqrt{2[(x_1 + x_1)^2 - 2x_1x_2]} = \sqrt{2(m^2 - 6m - 3)}. \end{aligned}$$

$$\text{Mà } AB \leq 4 \Leftrightarrow AB^2 \leq 16 \Leftrightarrow m^2 - 6m - 3 \leq 8 \Leftrightarrow m^2 - 6m - 11 \leq 0.$$

$$\Leftrightarrow 3 - 2\sqrt{5} \leq m \leq 3 + 2\sqrt{5} \quad (3).$$

Từ (2) và (3), kết hợp m là số nguyên dương ta suy ra $m = 7$.

Vậy có 1 giá trị nguyên dương của m thỏa điều kiện bài toán.

Câu 26. Tập xác định của hàm số $y = \left(\frac{4x-3x^2}{2x^2+3x+1} \right)^{-\frac{2}{3}}$ là:

A. $D = \left(-1; \frac{4}{3} \right).$

B. $D = \left(-1; -\frac{1}{2} \right) \cup \left(0; \frac{4}{3} \right).$

C. $D = \left[-1; -\frac{1}{2} \right] \cup \left[0; \frac{4}{3} \right].$

D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -1; -\frac{1}{2}; 0; \frac{4}{3} \right\}.$

Lời giải

Chọn B

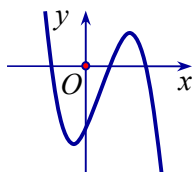
Hàm số xác định khi và chỉ khi $\frac{4x-3x^2}{2x^2+3x+1} > 0$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{4}{3}$	$+\infty$
$4x-3x^2$		-	-	-	0	+
$2x^2+3x+1$		+	0	-	0	+
$\frac{4x-3x^2}{2x^2+3x+1}$		-	+	-	0	+

Vậy tập xác định là $D = \left(-1; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(0; \frac{4}{3}\right)$.

Câu 27. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình dưới đây. Trong các giá trị a, b, c, d có bao nhiêu giá trị dương?



A. 4.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

Theo hình dạng đồ thị ta suy ra $a < 0$.

Hàm số có hai điểm cực trị trái dấu nên a và c trái dấu, suy ra $c > 0$.

Đồ thị hàm số có giao điểm với trục tung tại điểm có tung độ âm nên $d < 0$.

Hoành độ tâm đối xứng của đồ thị là nghiệm của phương trình

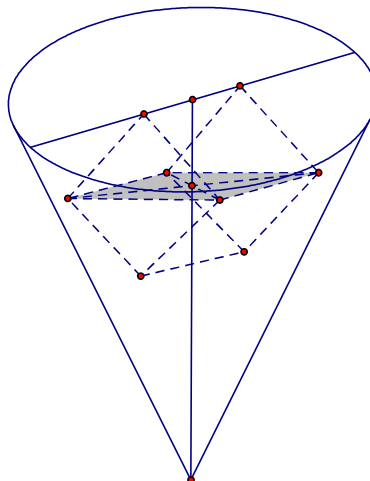
$$y'' = 0 \Leftrightarrow 6ax + 2b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{3a}.$$

Từ đồ thị ta thấy tâm đồ thị hàm số là số dương nên $-\frac{b}{3a} > 0 \Leftrightarrow \frac{b}{a} < 0$, suy ra a, b trái dấu,

do đó ta có $b > 0$.

Vậy $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$.

Câu 28. Một khối gạch hình lập phương (không thấm nước) có cạnh bằng 2 được đặt vào trong một chiếc phễu hình nón đầy nước theo cách như sau: Một cạnh của viên gạch nằm trên mặt nước (nằm trên một đường kính của mặt đáy hình nón), các đỉnh còn lại nằm trên mặt nón, tâm của viên gạch nằm trên trục hình nón (như hình vẽ). Tính thể tích nước còn lại trong phễu (làm tròn đến hai chữ số thập phân)



A. $V = 22,10$.

B. $V = 22,27$.

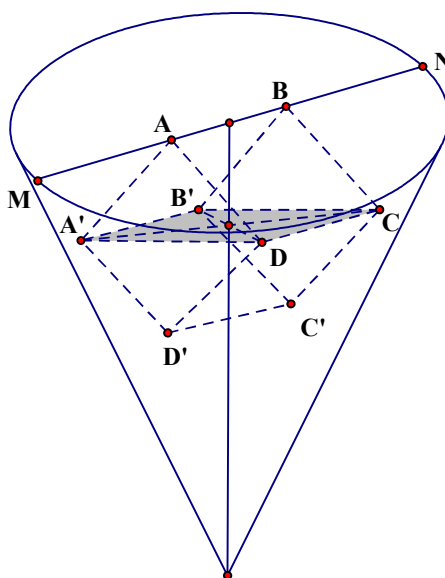
C. $V = 20,64$.

D. $V = 22,30$.

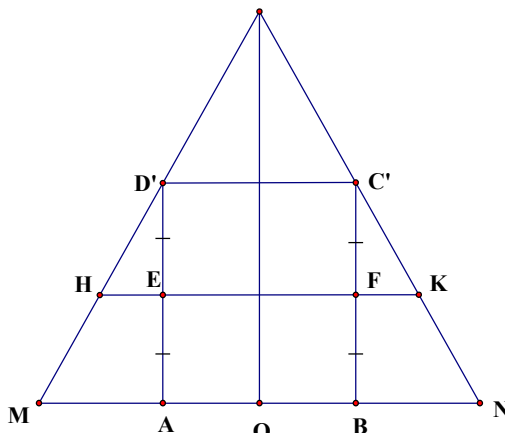
Lời giải

Chọn B

Đặt các đỉnh như hình vẽ dưới đây



Xét mặt phẳng qua trục của khối nón chứa cạnh AB, ta có hình phẳng



Với HK là đường kính đường tròn ngoại tiếp $A'B'CD$

Ta có $BC' = 2\sqrt{2}$ và $A'C = 2\sqrt{3}$

Khi

đó

$$\tan \widehat{D'A'E} = \frac{D'E}{A'E} = \frac{D'A}{2} \cdot \frac{2}{A'C' - EF} = \sqrt{2} \cdot \frac{2}{2\sqrt{3} - 2} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cot \widehat{D'A'E} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} + 1}$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} MA = 2EA \cdot \tan \left(\frac{\pi}{2} - \widehat{D'A'E} \right) = 2EA \cdot \cot \widehat{D'A'E} = 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} + 1} = \frac{4}{\sqrt{3} + 1} \\ h = (MA + AO) \cdot \tan \widehat{D'MA} = \left(MA + \frac{AB}{2} \right) \cdot \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}} = \frac{5 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Như vậy thể tích cần tìm là

$$\frac{1}{3} \pi (MA + 1)^2 h - AB^3 = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{4}{\sqrt{3} + 1} + 1 \right)^2 \cdot \frac{5 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}} - 2^3 \approx 22,27.$$

Câu 29. Cho khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng 12, đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O . Thể tích khối chóp $A'.BCO$ bằng

A. 3.

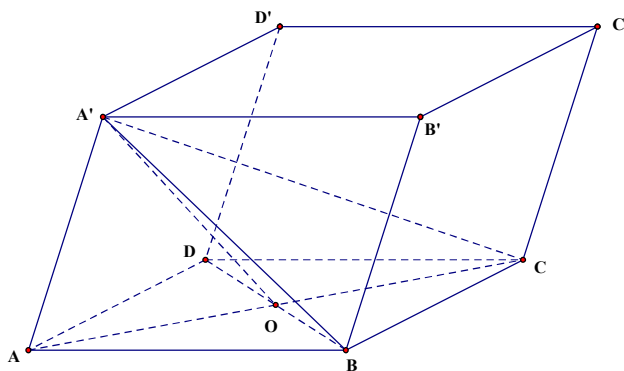
B. 1.

C. 2.

D. 4.

Lời giải

Chọn B



$$\text{Ta có } V_{A'.BCO} = \frac{1}{3} d[A', (ABCD)] \cdot S_{BCO} = \frac{1}{3} \cdot d[A', (ABCD)] \cdot \frac{1}{4} S_{ABCD} = \frac{1}{12} V_{ABCD.A'B'C'D'} = 1.$$

Câu 30. Cho hai số thực a, b thỏa mãn điều kiện $3a - 4 > b > 0$. Tính tổng $S = a + 2b$ khi biểu thức

$$P = \log_a \left(\frac{a^3}{4b} \right) + \frac{3}{16} \left(\log_{\frac{3a}{4+b}} a \right)^2 \text{ đạt giá trị nhỏ nhất}$$

A. $S = 10$.

B. $S = 11$.

C. $S = 12$.

D. $S = 8$.

Lời giải

Chọn D

$$3a - 4 > b > 0 \Rightarrow \begin{cases} 3a - 4 > 0 \\ a > \frac{4+b}{3} \end{cases} \Leftrightarrow a > \frac{4}{3} \Rightarrow a > 1$$

$$\text{Ta có } P = \log_a \left(\frac{a^3}{4b} \right) + \frac{3}{16} \left(\log_{\frac{3a}{4+b}} a \right)^2 = \log_a \left(\frac{a^3}{4b} \right) + \frac{3}{16} \left[\log_a \left(\frac{3a}{b+4} \right) \right]^{-2}$$

$$= \log_a \left(\frac{a^3}{4b} \right) + \frac{3}{16} \left[\log_a \left(\frac{3a}{b+2+2} \right) \right]^{-2}$$

Lại có $b + 2 + 2 \stackrel{Cauchy}{\geq} 3\sqrt[3]{4b} \Rightarrow 3a > b + 4 \geq 3\sqrt[3]{4b} \Rightarrow \frac{a}{\sqrt[3]{4b}} > 1 \Leftrightarrow \frac{a^3}{4b} > 1$ nên

$$P \geq \log_a \left(\frac{a^3}{4b} \right) + \frac{3}{16} \left[\frac{1}{\log_a \left(\frac{a}{\sqrt[3]{4b}} \right)} \right]^2 = \log_a \left(\frac{a^3}{4b} \right) + \frac{3}{16} \left(\frac{3}{\log_a \frac{a^3}{4b}} \right)^2$$

$$\Leftrightarrow P \geq \frac{1}{2} \log_a \left(\frac{a^3}{4b} \right) + \frac{1}{2} \log_a \left(\frac{a^3}{4b} \right) + \frac{3}{16} \left[\frac{3}{\log_a \left(\frac{a^3}{4b} \right)} \right]^2 \stackrel{Cauchy}{\geq} 3 \sqrt[3]{\frac{3}{64} \cdot \left[\log_a \left(\frac{a^3}{4b} \right) \right]^2 \cdot \frac{9}{\left[\log_a \left(\frac{a^3}{4b} \right) \right]^2}} = \frac{9}{4}$$

Do đó $\min P = \frac{9}{4}$,

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{2} = b = 2 \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 2 \end{cases}$

Vậy $S = a + 2b = 4 + 2 \cdot 2 = 8$.

Câu 31. Hàm số $y = \log_{0,5}(-x^2 + 2x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(1; +\infty)$.

B. $(0; 1)$.

C. $(-\infty; 1)$.

D. $(1; 2)$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D = (0; 2)$.

Ta có $y' = \frac{-2x + 2}{(-x^2 + 2x) \ln 0,5}$.

Với $x \in (0; 2)$ ta có $y' > 0 \Leftrightarrow \frac{-2x + 2}{(-x^2 + 2x) \ln 0,5} > 0 \Leftrightarrow -2x + 2 < 0 \Leftrightarrow x > 1$.

Kết hợp với điều kiện, $y' > 0 \Leftrightarrow x \in (1; 2)$.

Vậy hàm số $y = \log_{0,5}(-x^2 + 2x)$ đồng biến trên khoảng $(1; 2)$.

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = 5a, BC = 6a, CA = 7a$. Các mặt bên $(SAB), (SBC)$ và (SCA) cùng tạo với mặt phẳng đáy một góc 60° . Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) thuộc miền trong tam giác ABC . Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $8a^3\sqrt{3}$.

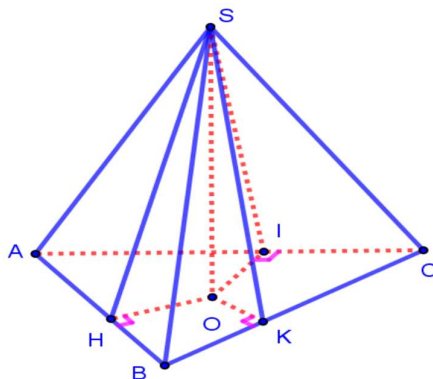
B. $4a^3\sqrt{3}$.

C. $\frac{8a^3\sqrt{3}}{3}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi O là chân đường vuông góc từ S xuống mặt phẳng $(ABC) \Rightarrow SO \perp (ABC)$.

Các mặt bên (SAB) , (SBC) và (SCA) cùng tạo với mặt phẳng đáy một góc 60° .

$\Rightarrow O$ là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$.

Gọi H, K, I lần lượt là hình chiếu của O lên các cạnh AB, BC, CA .

$\Rightarrow \widehat{SHO} = 60^\circ$.

Ta có $p = \frac{5a+6a+7a}{2} = 9a$; $S_{\triangle ABC} = \sqrt{9a(9a-5a)(9a-6a)(9a-7a)} = 6\sqrt{6}a^2$ (đvdt)

Suy ra bán kính đường tròn nội tiếp $r = OH = \frac{S_{\triangle ABC}}{p} = \frac{2\sqrt{6}}{3}a$.

Xét $\triangle SHO$ vuông tại O , $SO = OH \cdot \tan 60^\circ = \frac{2a\sqrt{6}}{3} \cdot \sqrt{3} = 2a\sqrt{2}$.

$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot 6\sqrt{6}a^2 \cdot 2a\sqrt{2} = 8a^3\sqrt{3}$ (Đvtt).

Câu 33. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = x^4 - 2(m-1)x^2 + m + 2020$ đồng biến trên khoảng $(-3; -1)$.

A. $m < 10$.

B. $m \leq 10$.

C. $m > 10$.

D. $m \geq 10$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = 4x^3 - 4(m-1)x$.

Hàm số $y = x^4 - 2(m-1)x^2 + m + 2020$ đồng biến trên khoảng $(-3; -1)$

$\Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (-3; -1) \Leftrightarrow 4x^3 - 4(m-1)x \geq 0, \forall x \in (-3; -1) \Leftrightarrow (m-1)x \leq x^3, \forall x \in (-3; -1)$

$\Leftrightarrow m-1 \geq x^2, \forall x \in (-3; -1) \Leftrightarrow m-1 \geq \max_{x \in [-3; -1]}(x^2) \Leftrightarrow m-1 \geq 9 \Leftrightarrow m \geq 10$.

Câu 34. Cho tập A có 20 phần tử. Hỏi tập A có bao nhiêu tập con khác rỗng mà có số phần tử chẵn ?

A. 2^{19}

B. $2^{19} - 1$

C. $2^{20} + 1$

D. 2^{20}

Lời giải

Chọn B

Số tập con khác rỗng của tập A có 20 phần tử mà số phần tử chẵn là

$n = C_{20}^2 + C_{20}^4 + C_{20}^6 + \dots + C_{20}^{18} + C_{20}^{20}$ hay ta có $n+1 = C_{20}^0 + C_{20}^2 + C_{20}^4 + C_{20}^6 + \dots + C_{20}^{18} + C_{20}^{20}$.

Xét khai triển $(1+x)^{20} = C_{20}^0 + C_{20}^1x + C_{20}^2x^2 + \dots + C_{20}^{18}x^{18} + C_{20}^{19}x^{19} + C_{20}^{20}x^{20}$.

Cho $x=1$ trong khai triển trên, ta được: $2^{20} = C_{20}^0 + C_{20}^2 + C_{20}^4 + \dots + C_{20}^{18} + C_{20}^{20}$ (1)

Cho $x=-1$ trong khai triển trên, ta được: $0 = C_{20}^0 - C_{20}^1 + C_{20}^2 - C_{20}^3 + \dots + C_{20}^{18} - C_{20}^{19} + C_{20}^{20}$ (2)

Cộng vế với vế của các đẳng thức (1) và (2) ta được:

$$2^{20} = 2(C_{20}^0 + C_{20}^2 + C_{20}^4 + C_{20}^6 + \dots + C_{20}^{18} + C_{20}^{20})$$

$$\Leftrightarrow 2^{20} = 2(n+1)$$

$$\Leftrightarrow n = 2^{19} - 1$$

Câu 35. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $AB = AC = 2a$ và $BC = 2a\sqrt{3}$. Tam giác $A'BC$ vuông cân tại A' và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy (ABC) . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC .

A. $a\sqrt{3}$.

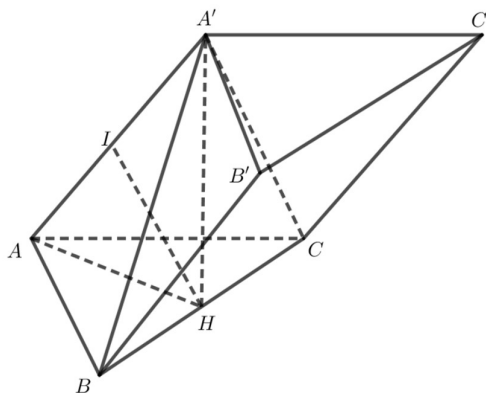
B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

D. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi H là trung điểm của BC , ta có $A'H \perp (ABC)$ và $A'H \perp BC$, mặt khác tam giác ABC cân tại A nên $AH \perp BC$. Vậy nên $BC \perp (A'AH) \Rightarrow A'A \perp BC$. Gọi I là hình chiếu của H lên $A'A$ thì IH là đoạn vuông góc chung của AA' và BC , do đó $d(AA', BC) = HI$.

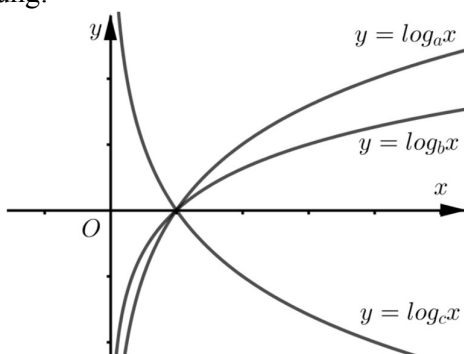
Trong tam giác vuông cân $A'BC$: $A'H = \frac{1}{2}BC = a\sqrt{3}$

Trong tam giác vuông ABH : $AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{4a^2 - 3a^2} = a$

Xét tam giác vuông $A'AH$ có $IH = \frac{AH \cdot A'H}{\sqrt{AH^2 + A'H^2}} = \frac{a \cdot a\sqrt{3}}{\sqrt{a^2 + 3a^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Vậy $d(AA', BC) = HI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Câu 36. Cho ba số dương a, b, c khác 1. Đồ thị các hàm số $y = \log_a x, y = \log_b x, y = \log_c x$ như hình vẽ dưới đây. Tìm khẳng định đúng:



A. $c < b < a$.

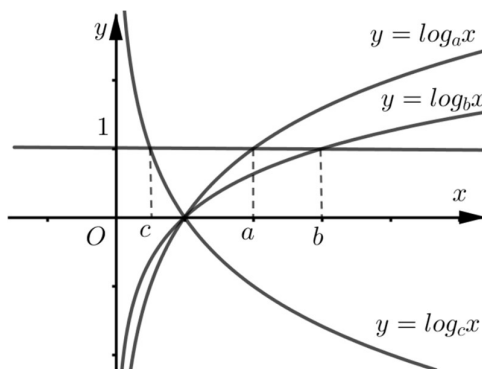
B. $c < a < b$.

C. $a < c < b$.

D. $b < a < c$.

Lời giải

Chọn B



Vẽ đường thẳng $y = 1$ lần lượt cắt đồ thị các hàm số $y = \log_a x, y = \log_b x, y = \log_c x$ tại các điểm có hoành độ lần lượt là a, b, c , ta thấy $0 < c < 1 < a < b$

Câu 37. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{1-x}}{x^2+4x+m}$ có đúng ba đường tiệm cận?

A. 9.

B. 7.

C. 10.

D. 8.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x \leq 1 \\ x^2 + 4x + m \neq 0 \end{cases}$$

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0$ nên đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang $y = 0$.

Vậy để đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận thì phương trình $x^2 + 4x + m = 0$ phải có hai nghiệm phân biệt nhỏ hơn hoặc bằng 1.

$$\text{Xét phương trình } x^2 + 4x + m = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x = -m$$

Hàm số $y = x^2 + 4x$ có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	1
$f(x)$	$+\infty$	-4	5

Từ BBT ta có điều kiện của m là $-4 < -m \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq m < 4, m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-5; -4; \dots; 3\}$.

Vậy có 9 giá trị m nguyên thỏa mãn.

Câu 38. Hàm số $y = -x^4 + 4x^3 - 2$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây ?

A. $(3; +\infty)$.

B. $(4; +\infty)$.

C. $(-\infty; 4)$.

D. $(-\infty; 3)$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có: } y' = -4x^3 + 12x^2 = -4x^2(x-3); y' > 0, \forall x \in (-\infty; 3).$$

Nên hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 3)$.

Câu 39. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = AC = a; BC = a\sqrt{2}$. Góc giữa hai đường thẳng AB và SC bằng

A. 90° .

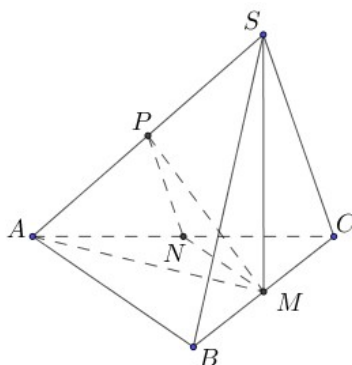
B. 30° .

C. 60° .

D. 45° .

Lời giải

Chọn C



Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm BC, AC và SA .

Vì $SA = SB = SC = AB = AC = a; BC = a\sqrt{2}$ nên $SM \perp (ABC)$

Ta có $MN \parallel AB, NP \parallel SC \Rightarrow (AB, SC) = (MN, NP)$.

Tam giác MNP có $MN = NP = MP = \frac{a}{2} \Rightarrow \Delta MNP$ đều $\Rightarrow (MN, NP) = \widehat{MNP} = 60^\circ$.

Vậy $(AB, SC) = 60^\circ$.

Câu 40. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , cạnh $BC = a\sqrt{6}$. Góc giữa mặt phẳng $(AB'C)$ và mặt phẳng $BCC'B'$ bằng 60° . Tính thể tích khối đa diện $AA'B'C'C$.

A. $a^3\sqrt{3}$.

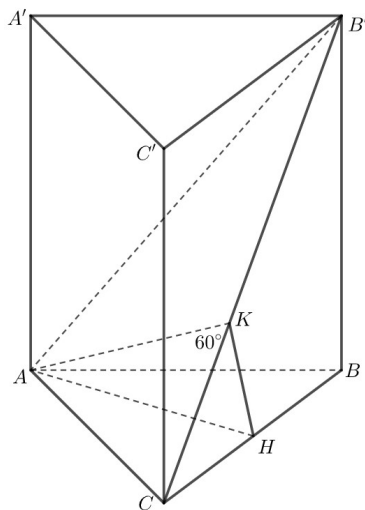
B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

D. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H là trung điểm BC ; trong $\Delta BB'C$ kẻ $HK \perp B'C$. Dễ dàng chứng minh được $AK \perp B'C$. Như vậy góc giữa mặt phẳng $(AB'C)$ và mặt phẳng $BCC'B'$ là góc $\angle AKH = 60^\circ$

$$\text{Ta có } AH = \frac{BC}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow KH = AH \cdot \cot 60^\circ = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Ta có } CK = \sqrt{CH^2 - KH^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{2} - \frac{a^2}{2}} = a$$

$$\frac{CK}{CB} = \frac{KH}{BB'} \Rightarrow BB' = \frac{KH.CB}{CK} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}.a\sqrt{6}}{a} = a\sqrt{3}$$

$$\text{Vậy } V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.BB' = \frac{1}{4}(a\sqrt{6})^2.a\sqrt{3} = \frac{3}{2}a^3\sqrt{3} \Rightarrow V_{AA'B'C'C} = \frac{2}{3}.\frac{3}{2}a^3\sqrt{3} = a^3\sqrt{3}$$

Câu 41. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 9x^2 - 4y^2 = 5 \\ \log_m(3x+2y) - \log_3(3x-2y) = 1 \end{cases}$ (tham số $m \in \mathbb{R}$) có nghiệm $(x; y)$ thỏa mãn $3x+2y \leq 5$. Khi đó giá trị lớn nhất của m là:

A. $\log_5 3$.

B. $\log_3 5$.

C. 5.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Đặt } \begin{cases} a = 3x+2y \\ b = 3x-2y \end{cases}$$

$$\text{Ta có hệ pt } \begin{cases} a.b = 5 \\ \log_m a - \log_3 b = 1, (2) \end{cases}$$

Thay $b = \frac{5}{a}$ vào pt (2), ta được pt

$$\log_m a - \log_3 \frac{5}{a} = 1 \Leftrightarrow \log_m a = \log_3 \frac{15}{a}$$

$$\Leftrightarrow \log_m 3 . \log_3 a = \log_3 \frac{15}{a} \Leftrightarrow \log_m 3 = \log_a \frac{15}{a}$$

$$\Leftrightarrow \log_m 3 = \log_a 15 - 1$$

$$\Leftrightarrow \log_3 m = \frac{1}{\log_a 15 - 1} \Leftrightarrow m = 3^{\frac{1}{\log_a 15 - 1}}$$

Vậy m lớn nhất khi và chỉ khi a lớn nhất,
Suy ra $a = 5$ thì m lớn nhất bằng 5.

Câu 42. Cho khối chóp $S.ABC$ có thể tích là $\frac{a^3}{3}$. Tam giác SAB có diện tích là $2a^2$. Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) .

A. $d = \frac{a}{2}$.

B. $d = 2a$.

C. a .

D. $d = \frac{2a}{3}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } d(C, (SAB)) = \frac{3V_{S.ABC}}{S_{\Delta SAB}} = \frac{3 \cdot \frac{a^3}{3}}{2a^2} = \frac{a}{2}.$$

Câu 43. Cho hàm số $f(x) = |2x^4 - 8x^3 - 16x^2 + 1 - m|$ (m là tham số). Biết rằng khi m thay đổi thì số điểm cực trị của hàm số có thể là a hoặc b hoặc c . Giá trị $a+b+c$ bằng

A. 12.

B. 16.

C. 15.

D. 13.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Xét hàm số } g(x) = 2x^4 - 8x^3 - 16x^2 + 1 - m$$

Ta có: $g'(x) = 8x^3 - 24x^2 - 32x$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 4 \end{cases} \text{ Bảng biến thiên của hàm số } y = g(x):$$

x	$-\infty$	-1	0	4	$+\infty$		
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$		$-5-m$		$1-m$		$+\infty$
					</		

Trường hợp 1: $1-m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq 1 \Rightarrow f(x) = |g(x)|$ có 5 cực trị.

Trường hợp 2: $-5-m < 0 < 1-m \Leftrightarrow -5 < m < 1 \Rightarrow f(x) = |g(x)|$ có 7 cực trị.

Trường hợp 3: $-255-m < 0 \leq -5-m \Leftrightarrow -255 < m \leq -5 \Rightarrow f(x) = |g(x)|$ có 5 cực trị.

Trường hợp 4: $0 \leq -255-m \Leftrightarrow m \leq -255 \Rightarrow f(x) = |g(x)|$ có 3 cực trị.

Vậy $a+b+c=15$.

Câu 44. Ba chiếc bình hình trụ cùng chứa một lượng nước như nhau, độ cao mực nước trong bình II gấp đôi bình I và trong bình III gấp đôi bình II. Chọn nhận xét đúng về bán kính đáy r_1, r_2, r_3 của ba bình I, II, III.

- A. r_1, r_2, r_3 theo thứ tự lập thành một cấp số nhân công bội $\frac{1}{2}$.
- B. r_1, r_2, r_3 theo thứ tự lập thành một cấp số nhân công bội $\sqrt{2}$.
- C.** r_1, r_2, r_3 theo thứ tự lập thành một cấp số nhân công bội $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
- D. r_1, r_2, r_3 theo thứ tự lập thành một cấp số nhân công bội 2.

Lời giải

Chọn C

Gọi V_1, V_2, V_3 lần lượt là lượng nước; h_1, h_2, h_3 lần lượt là độ cao mực nước trong các bình I, II, III.

Ta có: $V_1 = \pi r_1^2 h_1, V_2 = \pi r_2^2 h_2, V_3 = \pi r_3^2 h_3$

$$\text{Theo giả thiết: } V_1 = V_2 = V_3 \Leftrightarrow \begin{cases} V_1 = V_2 \\ V_2 = V_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi r_1^2 h_1 = \pi r_2^2 h_2 \\ \pi r_2^2 h_2 = \pi r_3^2 h_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r_1^2 h_1 = r_2^2 h_2 \\ r_2^2 h_2 = r_3^2 h_3 \end{cases} \quad (*)$$

$$\text{Mặt khác: } h_3 = 2h_2 = 4h_1 \text{ nên } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} r_1^2 h_1 = r_2^2 2h_1 \\ r_2^2 h_2 = r_3^2 2h_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r_1^2 = 2r_2^2 \\ r_2^2 = 2r_3^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = \sqrt{2}r_2 \\ r_2 = \sqrt{2}r_3 \end{cases}$$

Do đó r_1, r_2, r_3 theo thứ tự lập thành một cấp số nhân công bội $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Câu 45. Với m là tham số thực dương khác 1. Hãy tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_m(2x^2 + x + 3) \leq \log_m(3x^2 - x)$. Biết rằng bất phương trình có một nghiệm là $x = 1$.

A. $S = [-1; 0) \cup \left(\frac{1}{3}; 3\right]$.

B. $S = [-1; 3]$.

C. $S = (-1; 0) \cup \left(\frac{1}{3}; 3\right]$.

D. $S = (-1; 0) \cup (1; 3]$.

Lời giải

Chọn A

Trường hợp 1: $m > 1$

$$\log_m (2x^2 + x + 3) \leq \log_m (3x^2 - x)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + x + 3 > 0 \\ 2x^2 + x + 3 \leq 3x^2 - x \end{cases} \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$$

Trường hợp 2: $0 < m < 1$

$$\log_m (2x^2 + x + 3) \leq \log_m (3x^2 - x)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - x > 0 \\ 2x^2 + x + 3 \geq 3x^2 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - x > 0 \\ x^2 - 2x - 3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-1; 0) \cup \left(\frac{1}{3}; 3\right]$$

Vì $x = 1$ là một nghiệm của bất phương trình nên $S = [-1; 0) \cup \left(\frac{1}{3}; 3\right]$.

Câu 46. Cho mặt cầu (S) tâm O . Các điểm A, B, C nằm trên mặt cầu (S) sao cho $AB = 3, AC = 4, BC = 5$ và khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC) bằng 1. Thể tích của khối cầu (S) bằng

A. $\frac{20\sqrt{5}\pi}{3}$.

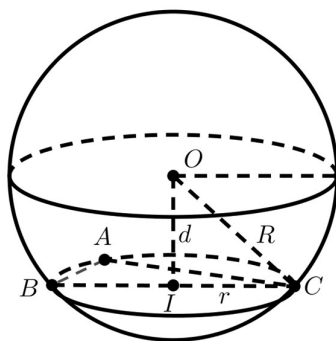
B. $\frac{29\sqrt{29}\pi}{6}$.

C. $\frac{13\sqrt{3}\pi}{6}$.

D. $\frac{7\sqrt{21}\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2$ nên tam giác ABC vuông tại A . Mặt phẳng (ABC) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ có bán kính $r = \frac{BC}{2} = \frac{5}{2}$. Mà khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC) là $d = 1$ nên mặt cầu (S) có bán kính $R = \sqrt{d^2 + r^2} = \frac{\sqrt{29}}{2}$.

$$\text{Vậy thể tích của khối cầu là } V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{\sqrt{29}}{2}\right)^3 = \frac{29\sqrt{29}\pi}{6}.$$

Câu 47. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , $AB = BC = \frac{1}{2}AD = a$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Thể tích của khối chóp $S.ACD$ bằng

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.

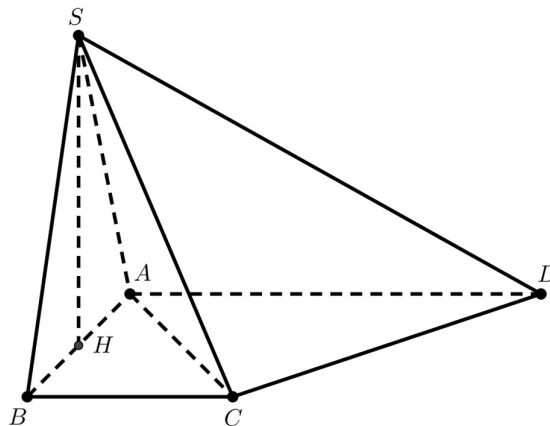
B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi H là trung điểm của AB . Do $\triangle SAB$ là tam giác đều cạnh bằng a nên $SH \perp AB$ và $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Mà $(SAB) \perp (ABCD)$ theo giao tuyến AB nên $SH \perp (ABCD)$.

Vì $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B nên diện tích tam giác ACD được tính theo công thức $S_{ACD} = \frac{1}{2}AD \cdot AB = a \cdot a = a^2$.

Vậy thể tích khối chóp $S.ACD$ là $V_{S.ACD} = \frac{1}{3}S_{ACD} \cdot SH = \frac{1}{3}a^2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 48. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{|x-2|-1}{2x+3}$ là

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định: $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{3}{2} \right\}$.

+) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x-2|-1}{2x+3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-3}{2x+3} = \frac{1}{2}$ nên đường thẳng $y = \frac{1}{2}$ là một tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

+) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x-2|-1}{2x+3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x+1}{2x+3} = -\frac{1}{2}$ nên đường thẳng $y = -\frac{1}{2}$ là một tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

+) $\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{3}{2}\right)^+} \frac{|x-2|-1}{2x+3} = +\infty$ nên đường thẳng $x = -\frac{3}{2}$ là một tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có tổng cộng 3 đường tiệm cận.

Câu 49. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = a, AC = a\sqrt{5}, \widehat{DAB} = \widehat{CBD} = 90^\circ, \widehat{ABC} = 135^\circ$. Biết góc giữa hai mặt phẳng (ABD) và (BCD) bằng 30° . Thể tích khối tứ diện $ABCD$ bằng.

A. $\frac{a^3}{\sqrt{2}}$.

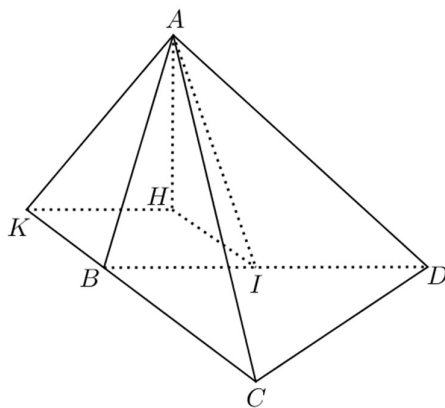
B. $\frac{a^3}{3\sqrt{2}}$.

C. $\frac{a^3}{2\sqrt{3}}$.

D. $\frac{a^3}{6}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos 135^\circ \Rightarrow 5a^2 = a^2 + BC^2 + \sqrt{2}a \cdot BC \Rightarrow BC = a\sqrt{2}$.

Gọi H, I, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên $(BCD), BD$ và BC . Khi đó góc giữa hai mặt phẳng (ABD) và (BCD) bằng $\widehat{AIH} = 30^\circ$ và $BIHK$ là hình chữ nhật.

Do $\widehat{ABC} = 135^\circ \Rightarrow \widehat{ABK} = 45^\circ$ nên $\triangle AKB$ vuông cân tại K . Do $AB = a \Rightarrow AK = BK = \frac{a}{\sqrt{2}}$ nên

$$HI = \frac{a}{\sqrt{2}} \Rightarrow AH = HI \tan 30^\circ = \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{6}}.$$

Trong tam giác vuông AHB ta có $HB^2 = AB^2 - AH^2 = a^2 - \frac{a^2}{6} = \frac{5a^2}{6}$. Khi đó

$$BI = \sqrt{BH^2 - HI^2} = \sqrt{\frac{5a^2}{6} - \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Trong tam giác vuông ABD ta có $AB^2 = BI \cdot BD \Rightarrow BD = \frac{AB^2}{BI} = \frac{a^2}{\frac{a\sqrt{3}}{3}} = a\sqrt{3}$.

$$\text{Vậy } V_{ABCD} = \frac{1}{6} AH \cdot BC \cdot BD = \frac{1}{6} \cdot \frac{a}{\sqrt{6}} \cdot a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{3} = \frac{a^3}{6}.$$

Câu 50. Tập nghiệm của bất phương trình $9^x - 2(x+5)3^x + 9(2x+1) \geq 0$ là $S = [a; b] \cup [c; +\infty)$. Khi đó $a + b + c$ bằng:

A. 4.

B. 1.

C. 5.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

Ta có $9^x - 2(x+5)3^x + 9(2x+1) \geq 0 \Leftrightarrow (3^x - 2x - 1)(3^x - 9) \geq 0$

$$\left[\begin{array}{l} 3^x \geq 2x+1 \\ 3^x \geq 9 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x \geq 2x+1 \\ x \geq 2 \end{array} \right] \quad (*)$$

$$\left[\begin{array}{l} 3^x \leq 2x+1 \\ 3^x \leq 9 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x \leq 2x+1 \\ x \leq 2 \end{array} \right]$$

Xét phương trình $3^x = 2x+1 \Leftrightarrow 3^x - 2x - 1 = 0$

Xét hàm số $f(x) = 3^x - 2x - 1 \Rightarrow f'(x) = 3^x \ln 3 - 2, f''(x) = 3^x \ln^2 3 > 0$

Vậy $f'(x) = 0$ có nhiều nhất một nghiệm. Vậy $f(x) = 0$ có nhiều nhất hai nghiệm. Hay

$3^x - 2x - 1 = 0$ có nhiều nhất hai nghiệm

Nhận xét: $3^x - 2x - 1 = 0$ có hai nghiệm $x = 0; x = 1$

$$\text{Khi đó (*)} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 0 \end{cases} \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \cdot \text{Vậy } S = [0; 1] \cup [2; +\infty).$$

Khi đó $a = 0; b = 1; c = 2 \Rightarrow a + b + c = 3$.

HẾT