

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề thi có 01 trang, gồm 4 câu)

Câu 1. (5.0 điểm)

a. Cho phương trình
$$\frac{(\sin x - \cos x)(\sin 2x - 3) - \sin 2x - \cos 2x + 1}{2 \sin x - \sqrt{2}} = 0.$$

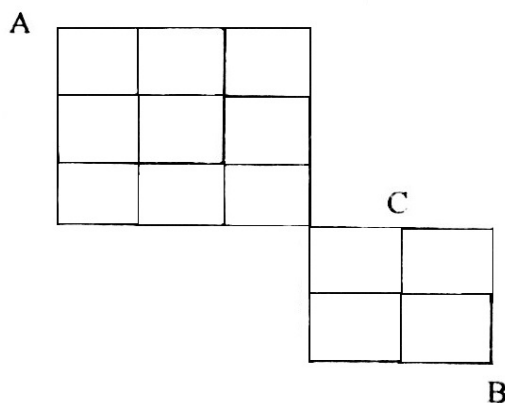
Hỏi phương trình có bao nhiêu nghiệm thuộc khoảng $(-2018\pi; 2019\pi)$?

b. Tùy theo giá trị của tham số m , tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + 1} - \sqrt{4x^2 + 2x + 3 + mx} \right).$

Câu 2. (5.0 điểm)

a. Cho n là số nguyên dương thỏa mãn C_n^1, C_n^2, C_n^3 lần lượt là số hạng thứ nhất, thứ 5, thứ 15 của một cấp số cộng. Chứng minh rằng $(C_{2n+1}^0)^2 + (C_{2n+1}^2)^2 + (C_{2n+1}^4)^2 + \dots + (C_{2n+1}^{2n})^2 = \frac{1}{2} C_{46}^{23}.$

b. Cho lưới ô vuông như hình vẽ, có một con kiến di chuyển từ điểm A đến điểm B bằng cách di chuyển trên cạnh để đi qua các điểm nút của lưới (điểm nút là đỉnh của các hình vuông nhỏ), mỗi bước nó di chuyển xuống dưới hoặc di chuyển sang phải để đến điểm nút gần nhất. Biết rằng nếu đến điểm C thì kiến sẽ bị ăn thịt. Giả sử kiến di chuyển một cách ngẫu nhiên và nó không biết tại C sẽ gặp nguy hiểm. Tính xác suất để kiến đến được điểm B.



Câu 3. (5.5 điểm)

Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật tâm O , cạnh $AB = a$, $AD = 2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, BC . Biết rằng $SA = SB = SC = SD$ và góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng $(ABCD)$ là 60° .

a. Tính diện tích tam giác SBM theo a .

b. Tính sin của góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng (SBD) .

Câu 4. (4.5 điểm)

a. Cho dãy số (u_n) thỏa mãn
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{\sqrt{5u_n + 1} + 1}, \quad n \geq 1, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Đặt $S_n = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \dots + u_n^2$. Chứng minh dãy (S_n) có giới hạn hữu hạn và tính giới hạn đó.

b. Cho tam giác ABC . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \sqrt{\sin A} + \sqrt{\sin B} + \sqrt[3]{12 \sqrt{\sin C}}.$

-----HẾT-----

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay;
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 1. Xét phương trình:
$$\frac{(\sin x - \cos x)(\sin 2x - 3) - \sin 2x - \cos 2x + 1}{2 \sin x - \sqrt{2}} = 0 \quad (1)$$

ĐK $\sin x \neq \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x \neq \frac{3\pi}{4} + l2\pi \end{cases} \quad (k, l \in \mathbb{Z})$

Khi đó phương trình (1) $\Leftrightarrow (\sin x - \cos x)(\sin 2x - 3) - \sin 2x - \cos 2x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (\sin x - \cos x)(\sin 2x - 3) - 2 \sin x \cos x + 2 \sin^2 x = 0$

$\Leftrightarrow (\sin x - \cos x)(\sin 2x - 3) + 2 \sin x (\sin x - \cos x) = 0$

$\Leftrightarrow (\sin x - \cos x)(\sin 2x + 2 \sin x - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x - \cos x = 0 & (2) \\ \sin 2x + 2 \sin x - 3 = 0 & (3) \end{cases}$

PT (2) $\Leftrightarrow \sin(x - \frac{\pi}{4}) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, đối chiếu điều kiện ta có $x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

PT (3) $\Leftrightarrow \sin 2x + 2 \sin x = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = 1 \\ \sin x = 1 \end{cases} \quad (vn)$

Vậy $x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

$x \in (-2018\pi; 2019\pi) \Leftrightarrow -2018\pi < \frac{5\pi}{4} + k2\pi < 2019\pi \Leftrightarrow -2018 < \frac{5}{4} + 2k < 2019$

Do $k \in \mathbb{Z}$ nên $k \in \{-1009, -1008, \dots, 1008\}$ suy ra có 2018 nghiệm.

Câu 1b. Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + 1} - \sqrt{4x^2 + 2x + 3} + mx \right)$

Nếu $m = -3$ thì $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + 1} - \sqrt{4x^2 + 2x + 3} + mx \right)$
 $= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left((\sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + 1} - x) - (\sqrt{4x^2 + 2x + 3} + 2x) \right)$

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 1}{\sqrt[3]{(x^3 + 2x^2 + 1)^2} + x\sqrt[3]{(x^3 + 2x^2 + 1)^2} + x^2} = \frac{2}{3}$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{4x^2 + 2x + 3} + 2x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 3}{\sqrt{4x^2 + 2x + 3} - 2x} = \frac{-1}{2}$

Suy ra $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + 1} - \sqrt{4x^2 + 2x + 3} + mx \right) = \frac{7}{6}$

Nếu $m < -3$ thì $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + 1} - \sqrt{4x^2 + 2x + 3} + mx \right)$

$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left((\sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + 1} - x) - (\sqrt{4x^2 + 2x + 3} + 2x) + (m + 3)x \right) = +\infty$

Nếu $m > -3$ thì $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + 1} - \sqrt{4x^2 + 2x + 3} + mx \right)$

$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left((\sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + 1} - x) - (\sqrt{4x^2 + 2x + 3} + 2x) + (m + 3)x \right) = -\infty$

Câu 2a. Theo giả thiết ta có $C_n^2 = C_n^1 + 4d$; $C_n^3 = C_n^1 + 14d \Rightarrow \frac{C_n^2 - C_n^1}{4} = \frac{C_n^3 - C_n^1}{14}$

$\Leftrightarrow 7(C_n^2 - C_n^1) = 2(C_n^3 - C_n^1) \Leftrightarrow 2C_n^3 - 7C_n^2 + 5C_n^1 = 0$

$$2 \frac{n(n-1)(n-2)}{6} - 7 \frac{n(n-1)}{2} + 5n = 0 \Leftrightarrow 2n^2 - 27n + 55 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 11 \\ n = \frac{5}{2} (L) \end{cases}$$

Với $n = 11$, thử lại thỏa mãn cấp số cộng

$$\text{Ta cần chứng minh } (C_{23}^0)^2 + (C_{23}^2)^2 + (C_{23}^4)^2 + \dots + (C_{23}^{22})^2 = \frac{1}{2} C_{46}^{23}$$

Ta sẽ chứng minh bài toán tổng quát $(C_n^0)^2 + (C_n^2)^2 + (C_n^4)^2 + \dots + (C_n^{n-1})^2 = \frac{1}{2} C_{2n}^n$ với n lẻ

$$\text{Xét khai triển } (1+x)^{2n} = (1+x)^n (x+1)^n = (C_n^0 + C_n^1 x + \dots + C_n^n x^n) (C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + \dots + C_n^n)$$

Đồng nhất hệ số của x^n của đẳng thức trên ta có

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + (C_n^3)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n \quad (1)$$

$$\text{Do } n \text{ lẻ và } C_n^0 = C_n^n; C_n^1 = C_n^{n-1}; \dots; C_n^{\frac{n-1}{2}} = C_n^{\frac{n+1}{2}};$$

$$\text{nên } (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + (C_n^3)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = 2 \left((C_n^0)^2 + (C_n^2)^2 + (C_n^4)^2 + \dots + (C_n^{n-1})^2 \right)$$

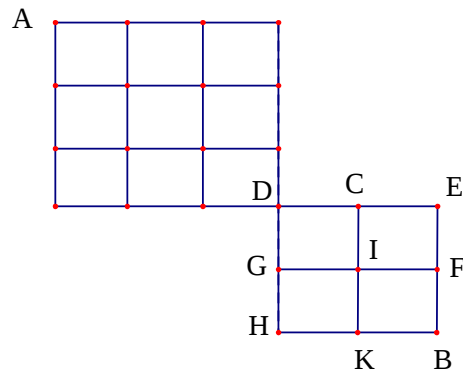
$$\text{Thay vào (1) ta có } (C_n^0)^2 + (C_n^2)^2 + (C_n^4)^2 + \dots + (C_n^{n-1})^2 = \frac{1}{2} C_{2n}^n \text{ (đpcm)}$$

Câu 2b Kiến muốn đi đến B thì bắt buộc phải đi qua D

Gọi m là số cách đi từ A đến D

Gọi n là số cách đi từ D đến B

Gọi k là số cách đi từ D đến B mà không đi qua C



Ta có số cách đi từ A đến B là mn ; số cách đi từ A đến B mà không đi qua C là mk .

$$\text{Ta có xác suất mà kiến đi được đến B là } p = \frac{mk}{mn} = \frac{k}{n}$$

Các cách đi từ D đến B mà có đi qua C là: DCEFB; DCIFB; DCIKB; suy ra số cách đi từ D đến B có mà không đi qua C là 3.

Vì tính đối xứng của lưới ô vuông 2×2 nên số cách đi từ D đến B mà không qua C là 3.

$$\text{Suy ra } k = 3, n = 6. \text{ Do đó } p = \frac{k}{n} = \frac{1}{2}$$

Câu 3a Vì $SA = SC$ nên $SO \perp AC$

Vì $SB = SD$ nên $SO \perp BD$

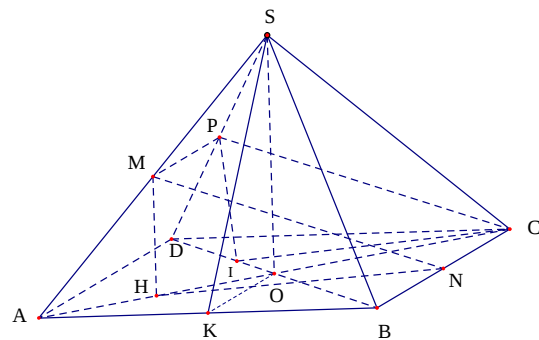
Do đó $SO \perp (ABCD)$

Trong tam giác SAC kẻ

$MH \perp AC (H \in AC) \Rightarrow MH \parallel SO$

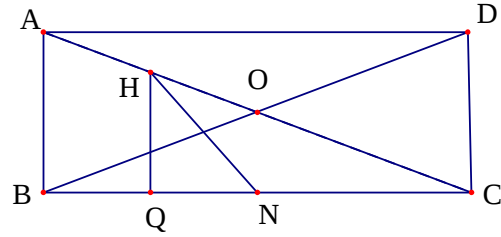
$\Rightarrow MH \perp (ABCD)$

Theo giả thiết thì $\widehat{MNH} = 60^\circ$



Ta có: $HQ = \frac{3}{4}a; QN = \frac{a}{2}$

$$NH^2 = HQ^2 + QN^2 = \left(\frac{3a}{4}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{13a^2}{16}$$



Suy ra $NH = \frac{a\sqrt{13}}{4}$

Do đó $MH = NH \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{39}}{4}$, suy ra $SO = 2MH = \frac{a\sqrt{39}}{2}$

Ta có $S_{\Delta SMB} = \frac{1}{2}S_{\Delta SAB} = \frac{1}{4}SK \cdot AB$; $SK = \sqrt{SO^2 + KO^2} = \sqrt{\frac{39a^2}{4} + a^2} = \frac{a\sqrt{43}}{2}$

Suy ra $S_{\Delta SMB} = \frac{1}{4}SK \cdot AB = \frac{a^2\sqrt{43}}{8}$

Câu 3b Gọi P là trung điểm của SD , ta có tứ giác $MPCN$ là hình bình hành suy ra $MN \parallel CP$

Gọi α là góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng (SBD) , ta thấy α bằng góc giữa đường thẳng CP và mặt phẳng (SBD)

Kẻ $CI \perp BD \Rightarrow CI \perp (SBD) \Rightarrow \alpha = \widehat{CPI}$

Tam giác BCD vuông tại C có CI là đường cao, suy ra

$$\frac{1}{CI^2} = \frac{1}{CB^2} + \frac{1}{CD^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{5}{4a^2} \Rightarrow CI = \frac{2a}{\sqrt{5}}$$

Ta có $CP = MN = 2NH = \frac{a\sqrt{13}}{2}$

$$\sin \alpha = \frac{CI}{CP} = \frac{4}{\sqrt{65}}$$

Câu 4a Xét dãy: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{\sqrt{5u_n+1}+1}, \quad n \geq 1 \end{cases}$

Bằng quy nạp ta chứng minh được $u_n > 0 \forall n$

Ta có $u_{n+1} = \frac{2u_n}{\sqrt{5u_n+1}+1} = \frac{2(\sqrt{5u_n+1}-1)}{5}$

$$\Leftrightarrow 5u_{n+1} + 2 = 2\sqrt{5u_n+1} \Leftrightarrow 25u_{n+1}^2 + 20u_{n+1} + 4 = 20u_n + 4 \Leftrightarrow u_{n+1}^2 = \frac{4}{5}(u_n - u_{n+1})$$

$$S_n = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \dots + u_n^2 = u_1^2 + \frac{4}{5}(u_1 - u_n) = \frac{9}{5} - \frac{4}{5}u_n \quad (1)$$

Ta sẽ chứng minh (u_n) là dãy giảm.

Thật vậy có $u_2 = \frac{2(\sqrt{6}-1)}{5} < u_1$, giả sử $u_k > u_{k+1}$, thay vào công thức xác định dãy ta thấy $u_{k+1} > u_{k+2}$.

Vậy (u_n) là dãy giảm, mà $u_n > 0 \forall n$ suy ra tồn tại giới hạn $\lim u_n = l \ (l \geq 0)$

Từ đẳng thức $u_{n+1} = \frac{2(\sqrt{5u_n+1}-1)}{5} \Rightarrow l = \frac{2(\sqrt{5l+1}-1)}{5} \Leftrightarrow 5l+2 = 2\sqrt{5l+1}$

$$\Leftrightarrow 25l^2 + 20l + 4 = 20l + 4 \Leftrightarrow l = 0. \text{ Thay vào (1) ta có } \lim S_n = \frac{9}{5}$$

Câu 4b $P = \sqrt{\sin A} + \sqrt{\sin B} + \sqrt[4]{12}\sqrt{\sin C}$

Ta có $\left(\sqrt{\sin A} + \sqrt{\sin B}\right)^2 \leq 2(\sin A + \sin B) = 4\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} \leq 4\cos\frac{C}{2}$

$$\Rightarrow \sqrt{\sin A} + \sqrt{\sin B} \leq 2\sqrt{\cos\frac{C}{2}}$$

$$\Rightarrow P \leq 2\sqrt{\cos\frac{C}{2}} + 2\sqrt[4]{\frac{3}{4}}\sqrt{\sin C} \leq 2\sqrt{2\left(\cos\frac{C}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin C\right)}$$

Ta lại có $\left(\cos\frac{C}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin C\right)^2 \leq 2\left(\cos^2\frac{C}{2} + \frac{3}{4}\sin^2 C\right) = 1 + \cos C + \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\cos^2 C$

$$= \frac{8}{3} - \frac{3}{2}\left(\cos C - \frac{1}{3}\right)^2 \leq \frac{8}{3} \text{ suy ra } \cos\frac{C}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin C \leq 2\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Do đó $P \leq 2\sqrt{4\frac{\sqrt{6}}{3}} = 4\sqrt[4]{\frac{2}{3}}$

có “=” khi
$$\begin{cases} A = B \\ \cos\frac{C}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin C \\ \cos C = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = \arccos\frac{1}{3} \\ A = B \end{cases}$$