

ĐỀ THI SỐ 01

(Đề thi có 01 trang)

Môn thi: Toán

Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi: 09/4/2017

Câu 1 (3,0 điểm)

Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số $y = mx^2 - 2(m-1)x + 3m - 6$ cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt có hoành độ x_1 và x_2 thỏa mãn điều kiện $x_1 + 2x_2 = 1$

Câu 2 (7,0 điểm)

a) Giải phương trình $\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} = \sqrt{5-2x}$

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 7x^3 + y^3 + 3xy(x-y) - 12x^2 + 6x = 1 \\ \sqrt[3]{4x+y+1} + x^2 + \sqrt{3x+2y} = 8 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Câu 3 (4,0 điểm)

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có điểm $A(-1;3)$, đường phân giác trong góc A có phương trình $x + y - 2 = 0$, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $I(3;6)$. Viết phương trình đường thẳng BC, biết diện tích tam giác ABC gấp 4 lần diện tích tam giác IBC.

Câu 4 (3,0 điểm)

Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $xy + yz + zx = xyz$. Chứng minh rằng:
$$\frac{x^2 y^2}{z(x+y)^2} + \frac{y^2 z^2}{x(y+z)^2} + \frac{x^2 z^2}{y(x+z)^2} \geq \frac{9}{4}$$

Câu 5 (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn, không cân nội tiếp đường tròn (O) có đường cao AH, ($H \in BC$) và tâm đường tròn nội tiếp là I. Gọi M là điểm chính giữa cung nhỏ BC của (O) và D là điểm đối xứng với A qua O. Đường thẳng MD cắt các đường thẳng BC, AH theo thứ tự tại P và Q. Chứng minh rằng tam giác IPQ vuông.

-----Hết-----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

HƯỚNG DẪN CHẤM
ĐỀ THI SỐ 01
(Gồm có 05 trang)

Môn thi: Toán

Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề)

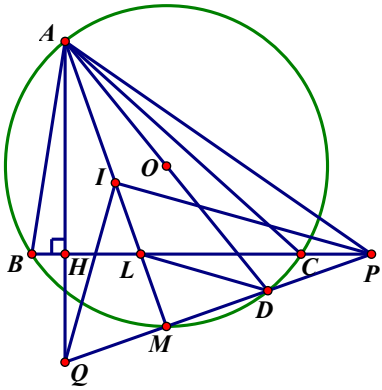
Ngày thi: 09/4/2017

Câu	Ý	Đáp án	Điểm
1		Với giá trị nào của m thì đồ thị hàm số $y = mx^2 - 2(m-1)x + 3m - 6$ cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt có hoành độ x_1 và x_2 thỏa mãn điều kiện $x_1 + 2x_2 = 1$	
		Xét phương trình hoành độ $mx^2 - 2(m-1)x + 3m - 6 = 0$ (1) Để đồ thị hàm số $y = mx^2 - 2(m-1)x + 3m - 6$ cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt khi phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt	0,5
		Tức là $\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = -2m^2 + 4m + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 1 - \frac{\sqrt{6}}{2} < m < 1 + \frac{\sqrt{6}}{2} \end{cases} \quad (2)$	0,5
		Gọi x_1 và x_2 là nghiệm của phương trình (1), bây giờ ta tìm điều kiện để $x_1 + 2x_2 = 1 \quad (3)$ Theo định lý Vi ét ta có: $x_1 + x_2 = \frac{2(m-1)}{m} \quad (4)$ $x_1 x_2 = \frac{3m-6}{m} \quad (5)$	1,0
2		Từ (3) và (4) ta có $x_1 = \frac{3m-4}{m}$; $x_2 = \frac{2-m}{m}$ Thế biểu thức của x_1 và x_2 vào (5) ta được $m = 2, m = \frac{2}{3}$ thỏa mãn (2)	1,0
		a) Giải phương trình $\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} = \sqrt{5-2x}$ b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 7x^3 + y^3 + 3xy(x-y) - 12x^2 + 6x = 1 \\ \sqrt[3]{4x+y+1} + x^2 + \sqrt{3x+2y} = 8 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$	

	a	Điều kiện: $-2 \leq x \leq \frac{5}{2}$ Phương trình $\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} = \sqrt{5-2x} \Leftrightarrow \sqrt{x+2} = \sqrt{3-x} + \sqrt{5-2x}$ $\Leftrightarrow 2x-3 = \sqrt{(3-x)(5-2x)}$	1,0
		$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ (2x-3)^2 = (3-x)(5-2x) \end{cases}$	1,0
		$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{2} \leq x \leq \frac{5}{2} \\ 2x^2 - x - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{2} \leq x \leq \frac{5}{2} \\ x = 2 \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$ Vậy phương trình có nghiệm $x = 2$	1,0
	b	Điều kiện: $3x + 2y \geq 0$ Ta có phương trình $7x^3 + y^3 + 3xy(x-y) - 12x^2 + 6x = 1$ $\Leftrightarrow 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$	1,0
		$\Leftrightarrow (2x-1)^3 = (x-y)^3 \Leftrightarrow 2x-1 = x-y \Leftrightarrow y = 1-x$	1,0
		Thay $y = 1-x$ vào phương trình $\sqrt[3]{4x+y+1} + x^2 + \sqrt{3x+2y} = 8$ ta được $\sqrt[3]{3x+2} + \sqrt{x+2} + x^2 - 8 = 0 \quad (x \geq -2)$ $\Leftrightarrow (\sqrt[3]{3x+2} - 2) + (\sqrt{x+2} - 2) + x^2 - 4 = 0$	1,0
		$\Leftrightarrow \frac{3x-6}{\sqrt[3]{(3x+2)^2} + 2\sqrt[3]{3x+2} + 4} + \frac{x-2}{\sqrt{x+2} + 2} + (x-2)(x+2) = 0$ $\Leftrightarrow (x-2) \left(\frac{3}{\sqrt[3]{(3x+2)^2} + 2\sqrt[3]{3x+2} + 4} + \frac{1}{\sqrt{x+2} + 2} + x + 2 \right) = 0$ $\Leftrightarrow x = 2$ Vậy hệ phương trình ban đầu có nghiệm $(x; y) = (2; -1)$	1,0
3		Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có điểm	

		$A(-1;3)$, đường phân giác trong góc A có phương trình $x + y - 2 = 0$, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $I(3;6)$. Viết phương trình đường thẳng BC, biết diện tích tam giác ABC gấp 4 lần diện tích tam giác IBC.	
		Phương trình đường tròn (C) ngoại tiếp tam giác ABC: $(x-3)^2 + (y-6)^2 = 25$	1,0
		Gọi D là giao điểm khác A của (C) và IA. Tọa độ điểm D là nghiệm của hệ $\begin{cases} (x-3)^2 + (y-6)^2 = 25 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases} (\text{loại}) \Rightarrow D(0;2)$	1,0
		Đường thẳng BC có VTPT $\overline{DI}(3;4) \Rightarrow BC: 3x + 4y + c = 0$ Vì $S_{ABC} = 4S_{IBC} \Rightarrow d(A;BC) = 4d(I;BC)$ $\Leftrightarrow c+9 = 4 c+33 \Leftrightarrow \begin{cases} c = -41 \\ c = -\frac{141}{5} \end{cases}$	1,0
		Vậy $BC: 3x + 4y - 41 = 0$ hoặc $BC: 3x + 4y - \frac{141}{5} = 0$	1,0
4		Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $xy + yz + zx = xyz$. Chứng minh rằng: $\frac{x^2 y^2}{z(x+y)^2} + \frac{y^2 z^2}{x(y+z)^2} + \frac{x^2 z^2}{y(x+z)^2} \geq \frac{9}{4}$	
		Từ điều kiện của x, y, z , ta có $xy + yz + zx = xyz \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ Đặt $\frac{1}{x} = a; \frac{1}{y} = b; \frac{1}{z} = c$, ta có $a + b + c = 1$ và $a, b, c > 0; a, b, c < 1$ Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với: $\frac{a}{(b+c)^2} + \frac{b}{(a+c)^2} + \frac{c}{(a+b)^2} \geq \frac{9}{4}$	1,0
		Ta có: $\frac{a}{(b+c)^2} = \frac{a}{(1-a)^2} = \frac{2a^2}{2a(1-a)(1-a)}$	1,0

	Áp dụng BĐT Cô si cho ba số dương $2a; 1-a; 1-a$, ta được $2a(1-a)(1-a) \leq \left(\frac{2a+1-a+1-a}{3} \right)^3 = \frac{8}{27}$ Do đó $\frac{a}{(b+c)^2} = \frac{a}{(1-a)^2} = \frac{2a^2}{2a(1-a)(1-a)} \geq \frac{27a^2}{4}$ Tương tự, ta cũng có : $\frac{b}{(a+c)^2} \geq \frac{27b^2}{4}$ $\frac{c}{(a+b)^2} \geq \frac{27c^2}{4}$ Cộng vế theo vế, ta được : $\frac{a}{(b+c)^2} + \frac{b}{(a+c)^2} + \frac{c}{(a+b)^2} \geq \frac{27}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$	
	Mặt khác, ta chứng minh được bất đẳng thức phụ sau: $(a^2 + b^2 + c^2) \geq \frac{(a+b+c)^2}{3}$ Thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương với $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac)$ $\Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2 \geq 0 \quad (\text{luôn đúng})$ Do đó $\frac{a}{(b+c)^2} + \frac{b}{(a+c)^2} + \frac{c}{(a+b)^2} \geq \frac{27}{4}(a^2 + b^2 + c^2) \geq \frac{27}{4} \cdot \frac{(a+b+c)^2}{3} = \frac{9}{4}$ Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$ hay $x=y=z=3$	1,0
5	Cho tam giác ABC nhọn, không cân nội tiếp đường tròn (O) có đường cao AH, ($H \in BC$) và tâm đường tròn nội tiếp là I. Gọi M là điểm chính giữa cung nhỏ BC của (O) và D là điểm đối xứng với A qua O. Đường thẳng MD cắt các đường thẳng BC, AH theo thứ tự tại P và Q. Chứng minh rằng tam giác IPQ vuông.	

		
	Không mất tính chất tổng quát, giả sử $AB < AC$. Ta có: $\angle OAC = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle AOC = 90^\circ - \angle ABC = \angle BHA$ và AI là phân giác $\angle BAC$ nên $\angle HAI = \angle OAI$. Suy ra $\triangle AQD$ cân tại A $\Rightarrow MQ = MD$ (1). Gọi L là giao điểm AM và BC. Khi đó $\angle LPD = 90^\circ - \angle HQP = 90^\circ - \angle ADM = \angle LAD$. Do đó tứ giác ALDP nội tiếp $\Rightarrow MD.MP = ML.MA$ (2).	1,0
	Ta có $\triangle MLC \sim \triangle MCA$ (g – g) nên $\frac{ML}{MC} = \frac{MC}{MA} \Rightarrow MC^2 = ML.MA$ (3). Lại có $\angle MIC = \angle MCI = \frac{A+C}{2}$ nên $\triangle MIC$ cân tại M $\Rightarrow MC = MI$ (4).	1,0
	Từ (1), (2), (3), (4) ta có: $MI^2 = MC^2 = ML.MA = MD.MP = MQ.MP$. Suy ra tam giác IPQ vuông tại I.	1,0

Lưu ý:

- Điểm thi là tổng điểm của các câu thành phần. Thang điểm toàn bài là 20 điểm. Không được làm tròn (điểm lẻ từng ý trong một câu nhỏ nhất là 0,25).

- Thí sinh làm bài bằng cách khác, lập luận chặt chẽ, lô gic, ra kết quả đúng vẫn cho điểm tối đa.

HẾT