

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO    KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP THPT VÒNG TỈNH**  
**VĨNH LONG**

**NĂM HỌC 2018 – 2019**

**Môn thi: TOÁN**

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

Thời gian làm bài: 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi: **Sáng 20/01/2019**

**Bài 1. (3.0 điểm)**

Giải phương trình  $(3 + \sqrt{5})^x + (3 - \sqrt{5})^x - 7.2^x = 0$ .

**Bài 2. (3.0 điểm)**

Tính tích phân  $\int_0^1 \frac{2x+10}{x^2+x+1} dx$ .

**Bài 3. (4.0 điểm)**

Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} (x + \sqrt{x^2 + 2x + 2} + 1)(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 1 \\ \sqrt{y - xy + 9} + 2018 = \sqrt{y^2 + 2y + 4} + 2019x \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

**Bài 4. (3.0 điểm)**

Từ tập hợp tất cả các số tự nhiên có năm chữ số mà các chữ số đều khác 0, lấy ngẫu nhiên một số. Tính xác suất để trong số tự nhiên được lấy ra chỉ có mặt ba chữ số khác nhau.

**Bài 5. (4.0 điểm)**

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ vuông góc  $Oxy$ , cho đường tròn tâm  $I$  nội tiếp tam giác  $ABC$ . Các đường thẳng  $AI$ ,  $BI$ ,  $CI$  lần lượt cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$  tại các điểm  $M(1; -5)$ ,  $N(\frac{7}{2}; \frac{5}{2})$ ,  $P(-\frac{13}{2}; \frac{5}{2})$  ( $M, N, P$  không trùng với các đỉnh của tam giác  $ABC$ ). Tìm tọa độ các đỉnh  $A, B, C$  biết rằng đường thẳng  $AB$  đi qua điểm  $Q(-1; 1)$  và điểm  $A$  có hoành độ dương.

**Bài 6. (3.0 điểm)**

Cho đường tròn  $(C)$  có tâm  $O$  và bán kính  $R$ , hai đường kính  $AB, CD$  vuông góc với nhau. Điểm  $M \in (C)$ , gọi  $H, K$  lần lượt là hình chiếu vuông góc của  $M$  trên  $AB$  và  $CD$ . Tìm vị trí điểm  $M$  để khi quay hình chữ nhật  $OHMK$  quanh đường thẳng  $AB$  thì thể tích của khối trụ sinh ra là lớn nhất.

**HẾT./.**

- Thí sinh không được sử dụng máy tính cầm tay và tài liệu.
- Giám thị không giải thích gì thêm.

HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN (Buổi sáng)

**Bài 1. (3.0 điểm)** Giải phương trình  $(3+\sqrt{5})^x + (3-\sqrt{5})^x - 7 \cdot 2^x = 0$ .

| Bài | Nội dung                                                                                                                                                                       | Điểm |
|-----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| 1   |                                                                                                                                                                                | 3.0  |
|     | Ta đưa phương trình về dạng $\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^x = 7$ . Đặt $\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^x = t, t > 0$             | 1.0  |
|     | Khi đó phương trình trở thành $t + \frac{1}{t} = 7 \Leftrightarrow t^2 - 7t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{7 \pm 3\sqrt{5}}{2} = \left(\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right)^2$ . | 1.0  |
|     | Từ đó suy ra phương trình có hai nghiệm $x = \pm 2$ .                                                                                                                          | 1.0  |

**Bài 2. (3.0 điểm)** Tính tích phân  $\int_0^1 \frac{2x+10}{x^2+x+1} dx$ .

| Bài | Nội dung                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | Điểm |
|-----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| 2   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 3.0  |
|     | Ta có<br>$\int_0^1 \frac{2x+10}{x^2+x+1} dx = \int_0^1 \left( \frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{9}{x^2+x+1} \right) dx$ $= \int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx + \int_0^1 \frac{9}{x^2+x+1} dx = I_1 + I_2$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 0.5  |
|     | $I_1 = \ln(x^2+x+1) \Big _0^1 = \ln 3$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 0.5  |
|     | $I_2 = \int_0^1 \frac{9}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} dx$ <p>Đặt <math>x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \tan t</math> với <math>t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]</math>, <math>dx = \frac{\sqrt{3}}{2} (\tan^2 t + 1) dt</math></p> <p><math>x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}</math> và <math>x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{3}</math></p> <p>Khi đó <math display="block">I_2 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{9 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} (\tan^2 t + 1) dt}{\frac{3}{4} (\tan^2 t + 1)} = \frac{18\sqrt{3}}{3} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} dt = \frac{18\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}\pi.</math></p> | 1.5  |
|     | Vậy $\int_0^1 \frac{2x+10}{x^2+x+1} dx = \pi\sqrt{3} + \ln 3$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 0.5  |

**Bài 3. (4.0 điểm)** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} (x + \sqrt{x^2 + 2x + 2} + 1)(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 1 & (1) \\ \sqrt{y - xy + 9} + 2018 = \sqrt{y^2 + 2y + 4} + 2019x & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

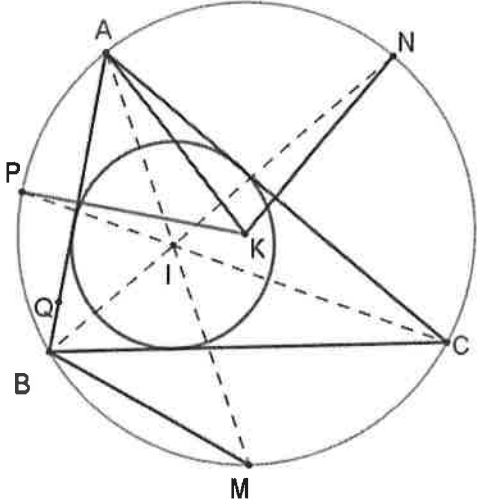
| Bài | Nội dung                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | Điểm |
|-----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| 3   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 4.0  |
|     | <p>Điều kiện: <math>y - xy + 9 \geq 0</math>.</p> <p>Ta có <math>\sqrt{y^2 + 1} &gt;  y </math> nên <math>\sqrt{y^2 + 1} + y &gt; 0</math> và <math>\sqrt{y^2 + 1} - y &gt; 0</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 0.5  |
|     | <p>Do (1) <math>\Leftrightarrow (x+1) + \sqrt{(x+1)^2 + 1} = (-y) + \sqrt{(-y)^2 + 1}</math> (3).</p> <p>Xét hàm số <math>f(t) = t + \sqrt{t^2 + 1}</math>, (<math>t \in \mathbb{R}</math>).</p> <p>Ta có <math>f'(t) = \frac{\sqrt{t^2 + 1} + t}{\sqrt{t^2 + 1}} &gt; 0</math>, <math>\forall t</math> nên <math>f(t)</math> là hàm số đồng biến trên <math>\mathbb{R}</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                              | 1.0  |
|     | Từ phương trình (3), ta có $x+1 = -y \Rightarrow x = -y-1$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 0.5  |
|     | <p>Thế vào phương trình (2), ta được:</p> $\sqrt{y^2 + 2y + 9} + 2018 = \sqrt{y^2 + 2y + 4} - 2019y - 2019$ $\Leftrightarrow \sqrt{y^2 + 2y + 9} - \sqrt{y^2 + 2y + 4} + 2019y + 4037 = 0 \quad (4).$ <p>Ta có <math>y = -2</math> là một nghiệm của phương trình (4).</p> <p>Xét hàm số <math>g(y) = \sqrt{y^2 + 2y + 9} - \sqrt{y^2 + 2y + 4} + 2019y + 4037</math>, với <math>y &lt; -\frac{4037}{2019}</math>.</p> <p>Ta có <math>g'(y) = (y+1) \left( \frac{1}{\sqrt{y^2 + 2y + 9}} - \frac{1}{\sqrt{y^2 + 2y + 4}} \right) + 2019 &gt; 0</math>, với <math>y &lt; -\frac{4037}{2019}</math> nên <math>g(y)</math> là hàm số đồng biến.</p> | 1.5  |
|     | <p>Do đó, phương trình (4) có nghiệm duy nhất <math>y = -2 \Rightarrow x = 1</math> (thỏa điều kiện).</p> <p>Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm <math>(x; y) = (1; -2)</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 0.5  |

**Bài 4. (3.0 điểm)** Từ tập hợp tất cả các số tự nhiên có năm chữ số mà các chữ số đều khác 0, lấy ngẫu nhiên một số. Tính xác suất để trong số tự nhiên được lấy ra chỉ có mặt ba chữ số khác nhau.

| Bài | Nội dung                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | Điểm |
|-----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| 4   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 3.0  |
|     | <p>Xét phép thử: <math>T =</math> "Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên có năm chữ số mà các chữ số đều khác 0". Ta có: <math> \Omega  = 9^5 = 59049</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 0.5  |
|     | <p>Gọi <math>A</math> là biến cố cần tìm xác suất, ta có:</p> <p>Số cách chọn 3 chữ số phân biệt <math>a, b, c</math> từ 9 chữ số thập phân khác 0 là <math>C_9^3</math>. Chọn 2 chữ số còn lại từ 3 chữ số đó, có 2 trường hợp rời nhau sau đây:</p> <p>TH1: Cả 2 chữ số còn lại cùng bằng 1 trong 3 chữ số <math>a, b, c</math>: có 3 cách; mỗi hoán vị từ 5! hoán vị của 5 chữ số (chẳng hạn) <math>a, a, a, b, c</math> tạo ra một số tự nhiên <math>n</math>; nhưng cứ</p> | 1.0  |

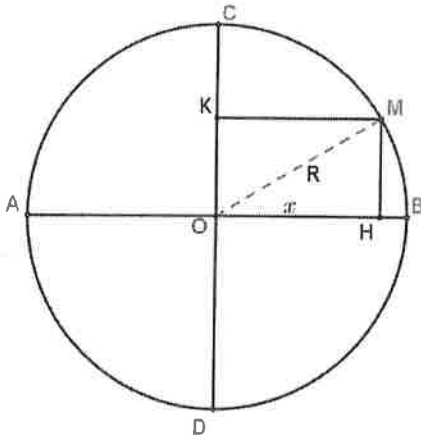
|  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |     |
|--|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
|  | <p>3! hoán vị của các vị trí mà <math>a, a, a</math> chiếm chỗ thì chỉ tạo ra cùng một số <math>n</math>, nên trong TH1 này có cả thảy <math>3 \cdot \frac{5!}{3!} = 60</math> số tự nhiên.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |     |
|  | <p>TH2: 1 trong 2 chữ số còn lại bằng 1 trong 3 chữ số <math>a, b, c</math> và chữ số kia bằng 1 chữ số khác trong 3 chữ số đó: có <math>3 \cdot 2 = 6</math> cách; mỗi hoán vị từ 5! hoán vị của 5 chữ số (chẳng hạn) <math>a, a, b, b, c</math> tạo ra một số tự nhiên <math>n</math>; nhưng cứ 2! hoán vị của các vị trí mà <math>a, a</math> chiếm chỗ và 2! hoán vị của các vị trí mà <math>b, b</math> chiếm chỗ thì chỉ tạo ra cùng một số <math>n</math>, nên trong TH2 này có cả thảy <math>3 \cdot 2 \cdot \frac{5!}{2!2!} = 180</math> số tự nhiên.</p> <p>Vậy: <math> \Omega_A  = (60 + 180)C_9^3 = 240 \cdot \frac{9!}{3!6!} = 240 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 3 = 20160</math>.</p> <p>Kết luận: <math>P(A) = \frac{ \Omega_A }{ \Omega } = \frac{20160}{59049} = \frac{2240}{6561}</math>.</p> | 1.5 |

**Bài 5. (4.0 điểm)** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ vuông góc  $Oxy$ , cho đường tròn tâm  $I$  nội tiếp tam giác  $ABC$ . Các đường thẳng  $AI, BI, CI$  lần lượt cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$  tại các điểm  $M(1; -5), N\left(\frac{7}{2}; \frac{5}{2}\right), P\left(-\frac{13}{2}; \frac{5}{2}\right)$  ( $M, N, P$  không trùng với các đỉnh của tam giác  $ABC$ ). Tìm tọa độ các đỉnh  $A, B, C$  biết rằng đường thẳng  $AB$  đi qua điểm  $Q(-1; 1)$  và điểm  $A$  có hoành độ dương.

| Bài | Nội dung                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | Điểm |
|-----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| 5   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 4.0  |
|     |                                                                                                                                                                                                                                      |      |
|     | <p>Đường tròn ngoại tiếp tam giác <math>ABC</math> là đường tròn đi qua 3 điểm <math>M, N, P</math> nên ta lập được phương trình này là: <math>x^2 + y^2 + 3x - 29 = 0</math> suy ra tâm <math>K</math> của đường tròn ngoại tiếp tam giác <math>ABC</math> có tọa độ là <math>K\left(-\frac{3}{2}; 0\right)</math>.</p> | 1.0  |
|     | <p>Do <math>AB \perp KP</math> nên <math>AB</math> có véc-tơ pháp tuyến <math>\overrightarrow{n_{AB}} = \overrightarrow{KP} = -\frac{5}{2}(2; -1)</math>. Suy ra phương trình <math>AB: 2(x+1) - 1(y-1) = 0 \Leftrightarrow 2x - y + 3 = 0</math>.</p>                                                                   | 1.0  |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Do đó tọa độ $A, B$ là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ x^2 + y^2 + 3x - 29 = 0 \end{cases}$                                                                                                                                                                                                                       |     |
| $\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 3 \\ x^2 + 3x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, y = 5 \\ x = -4, y = -5 \end{cases}$ . Suy ra $A(1;5), B(-4;-5)$ .                                                                                                                                                             |     |
| Do $AC \perp KN$ nên $AC$ có véc-tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_{AC}} = \overrightarrow{KN} = \frac{5}{2}(2;1)$<br>Suy ra phương trình $AC: 2(x-1) + y - 5 = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 7 = 0$ .                                                                                                                                         | 1.0 |
| Khi đó tọa độ $A, C$ là nghiệm của hệ phương trình:<br>$\begin{cases} 2x + y - 7 = 0 \\ x^2 + y^2 + 3x - 29 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x + 7 \\ x^2 - 5x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, y = 5 \\ x = 4, y = -1 \end{cases}$<br>Từ đây suy ra $C(4;-1)$ . Vậy $A(1;5), B(-4;-5), C(4;-1)$ . | 1.0 |

**Bài 6. (3.0 điểm)** Cho đường tròn  $(C)$  có tâm  $O$  và bán kính  $R$ , hai đường kính  $AB, CD$  vuông góc với nhau. Điểm  $M \in (C)$ , gọi  $H, K$  lần lượt hình chiếu vuông góc của  $M$  trên  $AB$  và  $CD$ . Tìm vị trí điểm  $M$  để khi quay hình chữ nhật  $OHMK$  quanh đường thẳng  $AB$  thì thể tích của khối trụ sinh ra là lớn nhất

| Bài | Nội dung                                                                                                                                                                                                                                              | Điểm |
|-----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| 6   |                                                                                                                                                                                                                                                       | 3.0  |
|     |                                                                                                                                                                   |      |
|     | Đặt $OH = x, OK = y$ khi đó khối trụ sinh ra khi quay hình chữ nhật $OHMK$ quanh $AB$ có thể tích $V = \pi xy^2$ hay $V = \pi(R^2 - x^2)x$ . Suy ra $V^2 = \pi^2(R^2 - x^2)^2 x^2$ .                                                                  | 1.0  |
|     | Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 3 số $(R^2 - x^2); (R^2 - x^2); 2x^2$ ta có<br>$(R^2 - x^2)(R^2 - x^2)2x^2 \leq \left( \frac{(R^2 - x^2) + (R^2 - x^2) + 2x^2}{3} \right)^3$<br>$\Rightarrow (R^2 - x^2)^2 x^2 \leq \frac{8R^6}{54} = \frac{4R^6}{27}$ | 1.0  |
|     | $V^2 \leq \frac{4\pi^2 R^6}{27} \Rightarrow V \leq \frac{2\pi R^3}{3\sqrt{3}}$<br>Vậy $\text{Max}(V) = \frac{2\pi R^3}{3\sqrt{3}}$ . Dấu “=” xảy ra khi $R^2 - x^2 = 2x^2 \Rightarrow x = \frac{R\sqrt{3}}{3}, y = \frac{R\sqrt{6}}{3}$ .             | 1.0  |

HẾT.

**Bài 1. (4.0 điểm)**

Tìm tất cả giá trị của tham số  $m$  sao cho điểm cực tiểu của đồ thị hàm số  $y = x^3 + x^2 + mx - 1$  nằm bên phải trục tung.

**Bài 2. (4.0 điểm)**

Tìm tất cả giá trị của  $m$  để bất phương trình  $1 + \log_5(x^2 + 1) \geq \log_5(mx^2 + 4x + m)$  thoả mãn với mọi  $x \in \mathbb{R}$ .

**Bài 3. (4.0 điểm)**

Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  có tất cả các cạnh bằng  $a$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $BC, SA$  và  $\alpha$  là góc tạo bởi đường thẳng  $MN$  với mặt phẳng  $(SBD)$ . Tính  $\tan \alpha$ .

**Bài 4. (4.0 điểm)**

Tính các góc của tam giác  $ABC$  biết  $\sin \frac{3A}{2} + \sin \frac{A-C}{2} + \sin \frac{A-B}{2} = \frac{3}{2}$ .

**Bài 5. (4.0 điểm)** Cho  $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ x + y + z = xyz. \end{cases}$

Chứng minh rằng  $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{y^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{z^2+1}} \leq \frac{3}{2}$ .

HẾT

- Thí sinh không được sử dụng máy tính cầm tay và tài liệu.
- Giám thị không giải thích gì thêm.

HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN (Buổi chiều)

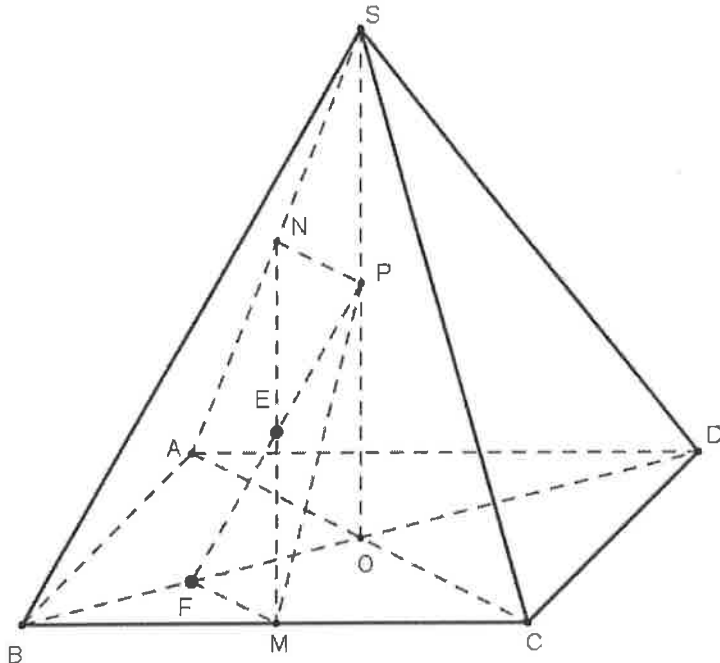
**Bài 1. (4.0 điểm)** Tìm tất cả giá trị của tham số  $m$  sao cho điểm cực tiểu của đồ thị hàm số  $y = x^3 + x^2 + mx - 1$  nằm bên phải trục tung.

| Bài | Nội dung                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | Điểm |
|-----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| 1   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 4.0  |
|     | <p>Ta có <math>y' = 3x^2 + 2x + m</math></p> <p>Để hàm số có cực tiểu thì phương trình <math>y' = 0</math> (1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi <math>\Delta' = 1 - 3m &gt; 0 \Leftrightarrow m &lt; \frac{1}{3}</math>.</p>                                                                                                   | 1.0  |
|     | <p>Khi đó (1) có hai nghiệm phân biệt <math>x_{CD}, x_{CT}</math> là hoành độ hai điểm cực trị. Theo định lí Viet ta có</p> $\begin{cases} x_{CD} + x_{CT} = -\frac{2}{3} < 0 \quad (2) \\ x_{CD} \cdot x_{CT} = \frac{m}{3} \quad (3) \end{cases}, \text{ trong đó } x_{CD} < x_{CT} \text{ vì hệ số của } x^3 \text{ lớn hơn } 0.$ | 1.5  |
|     | <p>Để cực tiểu của đồ thị hàm số nằm bên phải trục tung thì phải có: <math>x_{CT} &gt; 0</math>, kết hợp (2) và (3) suy ra (1) có hai nghiệm trái dấu <math>\Leftrightarrow x_{CD} \cdot x_{CT} = \frac{m}{3} &lt; 0 \Leftrightarrow m &lt; 0</math>.</p>                                                                            | 1.5  |

**Bài 2. (4.0 điểm)** Tìm tất cả giá trị của  $m$  để bất phương trình  $1 + \log_5(x^2 + 1) \geq \log_5(mx^2 + 4x + m)$  thoả mãn với mọi  $x \in \mathbb{R}$ .

| Bài | Nội dung                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | Điểm |
|-----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| 2   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 4.0  |
|     | <p>BPT thoả mãn với mọi <math>x \in \mathbb{R}</math> khi và chỉ khi</p> $\begin{cases} mx^2 + 4x + m > 0 \\ 5(x^2 + 1) \geq mx^2 + 4x + m \end{cases} (\forall x \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} mx^2 + 4x + m > 0 \\ (5-m)x^2 - 4x + 5 - m \geq 0 \end{cases} (\forall x \in \mathbb{R})$                                                                           | 1.0  |
|     | <p>Trường hợp 1: <math>m = 0</math> hoặc <math>m = 5</math> không thoả.</p> <p>Trường hợp 2: <math>m \neq 0</math> và <math>m \neq 5</math>, để thoả yêu cầu bài toán ta có</p> $\begin{cases} m > 0 \\ 16 - 4m^2 < 0 \\ 5 - m > 0 \\ 16 - 4(5 - m)^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < -2 \\ m > 2 \\ m < 5 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < m \leq 3.$ | 3.0  |

**Bài 3. (4.0 điểm)** Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  có tất cả các cạnh bằng  $a$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $BC, SA$  và  $\alpha$  là góc tạo bởi đường thẳng  $MN$  với mặt phẳng  $(SBD)$ . Tính  $\tan \alpha$ .

| Bài | Nội dung                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | Điểm |
|-----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| 3   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 4.0  |
|     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |      |
|     | <p>Gọi <math>O</math> là tâm của đáy <math>ABCD</math>; <math>P, F</math> lần lượt là trung điểm của <math>SO, BO</math>.</p> <p>Mặt khác <math>AO \perp (SBD)</math> mà <math>AO \parallel NP \Rightarrow NP \perp (SBD)</math>, tương tự <math>MF \perp (SBD)</math></p> <p>Tứ giác <math>MFNP</math> là hình bình hành; Gọi <math>E</math> là giao điểm của hai đường chéo <math>MN</math> và <math>PF \Rightarrow</math> Góc giữa đường thẳng <math>MN</math> với mặt phẳng <math>(SBD)</math> là <math>\widehat{NEP}</math>.</p> | 2.0  |
|     | <p>Trong tam giác <math>NEP</math> vuông tại <math>P</math> ta có:</p> $NP = \frac{a\sqrt{2}}{4}$ $SO^2 = SA^2 - AO^2 = a^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2} \Rightarrow OP^2 = \frac{a^2}{8}$ $PF^2 = OP^2 + OF^2 = \frac{a^2}{8} + \frac{a^2}{8} = \frac{a^2}{4} \Rightarrow PF = \frac{a}{2} \Rightarrow PE = \frac{a}{4}$                                                                                                                                                                                                          | 1.5  |
|     | $\tan \alpha = \tan \widehat{NEP} = \frac{NP}{PE} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{4}}{\frac{a}{4}} = \sqrt{2}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 0.5  |

**Bài 4. (4.0 điểm)** Tính các góc của tam giác  $ABC$  biết  $\sin \frac{3A}{2} + \sin \frac{A-C}{2} + \sin \frac{A-B}{2} = \frac{3}{2}$ .

| Bài | Nội dung                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | Điểm |
|-----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| 4   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 4.0  |
|     | <p>Do <math>\sin \frac{3A}{2} = \cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{3A}{2} \right)</math> nên bài toán trở thành:</p> $\cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{3A}{2} \right) + 2 \sin \left( \frac{2A-B-C}{4} \right) \cos \left( \frac{B-C}{4} \right) = \frac{3}{2}$ $\Leftrightarrow 1 - 2 \sin^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{3A}{4} \right) - 2 \sin \left( \frac{\pi}{4} - \frac{3A}{4} \right) \cos \left( \frac{B-C}{4} \right) = \frac{3}{2}$ $\Leftrightarrow 2 \left[ \sin^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{3A}{4} \right) + \sin \left( \frac{\pi}{4} - \frac{3A}{4} \right) \cos \left( \frac{B-C}{4} \right) + \frac{1}{4} \cos^2 \left( \frac{B-C}{4} \right) \right] + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos^2 \left( \frac{B-C}{4} \right) = 0$ $\Leftrightarrow 2 \left[ \sin \left( \frac{\pi}{4} - \frac{3A}{4} \right) + \frac{1}{2} \cos \left( \frac{B-C}{4} \right) \right]^2 + \frac{1}{2} \sin^2 \left( \frac{B-C}{4} \right) = 0 (*)$ | 1.5  |
|     | <p>Do <math>\left[ \sin \left( \frac{\pi}{4} - \frac{3A}{4} \right) + \frac{1}{2} \cos \left( \frac{B-C}{4} \right) \right]^2 \geq 0</math>; <math>\sin^2 \left( \frac{B-C}{4} \right) \geq 0</math> nên VT của (*) không âm.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 1.0  |
|     | <p>Suy ra (*) xảy ra dấu "=" <math>\Leftrightarrow \begin{cases} \sin \left( \frac{B-C}{4} \right) = 0 \\ \sin \left( \frac{\pi}{4} - \frac{3A}{4} \right) + \frac{1}{2} \cos \left( \frac{B-C}{4} \right) = 0 \end{cases}</math></p> <p>Giải hệ phương trình trên ta được <math>\begin{cases} A = 100^\circ \\ B = C = 40^\circ \end{cases}</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 1.5  |

**Bài 5. (4.0 điểm)** Cho  $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ x + y + z = xyz \end{cases}$

Chứng minh rằng  $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{y^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{z^2+1}} \leq \frac{3}{2}$

| Bài | Nội dung                                                                                                                                                                                          | Điểm |
|-----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| 5   |                                                                                                                                                                                                   | 4.0  |
|     | <p>Ta có <math>\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{\frac{xyz}{x^2(x+y+z)+xyz}} \leq \sqrt{\frac{yz}{(x+y)(x+z)}} \leq \frac{y}{2(x+y)} + \frac{z}{2(x+z)}</math></p>                                   | 2.0  |
|     | <p>Tương tự <math>\frac{1}{\sqrt{y^2+1}} \leq \frac{x}{2(x+y)} + \frac{z}{2(y+z)}</math>; <math>\frac{1}{\sqrt{z^2+1}} \leq \frac{z}{2(x+z)} + \frac{y}{2(y+z)}</math></p>                        | 1.0  |
|     | <p>Cộng các vế lại ta có <math>\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{y^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{z^2+1}} \leq \frac{3}{2}</math>.</p> <p>Dấu "=" xảy ra khi <math>x = y = z = \sqrt{3}</math>.</p> | 1.0  |

HẾT.