SỞ GIÁO DỤC ĐÀO TẠO
BẾN TRE

ĐỀ CHÍNH THỨC

(*Đề thi có 1 trang*)

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH LỚP 12
TRUNG HỌC PHỔ THÔNG
NĂM HỌC 2022 – 2023
Môn Toán
Ngày thi 09/03/2023

Thời gian làm bài: 180 phút (không kể thời gian phát đề).

Câu 1. (2,0 *điểm*). Cho hàm số $y = (m-3)x^3 + mx^2 + (m+1)x + 9$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 2. (4,0 *điểm*). Cho phương trình $x^4 - 4x^3 + 8x = k$ (với k là tham số thực).

a) Giải phương trình với $k = 5$.

b) Tìm tất cả các số nguyên k để phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

Câu 3. (2,0 *điểm*). Trong 1600 thí sinh dự thi Kỳ thi chọn học sinh giỏi cấp tỉnh ngày 9/3/2023, người ta lập ra các nhóm như sau: Chọn k thí sinh trong 1600 thí sinh và trong k thí sinh đó chọn ra 1 thí sinh làm nhóm trưởng ($1 \leq k \leq 1600$). Hỏi có tất cả bao nhiêu cách lập ra các nhóm như trên.

Câu 4. (2,0 *điểm*). Cho dãy số (u_n) được xác định bởi

$$\begin{cases} u_1 = 2023 \\ (4n^2 + 8n)\, u_{n+1} = (n^2 + 4n + 3)\, u_n,\ n \geq 1 \end{cases}$$

Tính $\lim \left(\dfrac{4^n}{n^2} \cdot u_n \right)$.

Câu 5. (3,0 *điểm*). Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy(y+1) + y^2 + 1 = 4y \\ xy^2(x+2) + \dfrac{1}{y^2} + y^2 = 5 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$.

Câu 6. (3,0 *điểm*). Cho a, b, c là các số thực dương thỏa $a^2 + b^2 + c^2 = 27$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq 12 \left(\frac{1}{a^2+63} + \frac{1}{b^2+63} + \frac{1}{c^2+63} \right)$$

Câu 7. (4,0 *điểm*).

a) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh bằng a. Trên đoạn AD' lấy điểm M, trên đoạn BD lấy điểm N sao cho $AM = DN = x$, với $0 < x < a\sqrt{2}$. Chứng minh độ dài đoạn MN ngắn nhất khi $x = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. Khi đó, tính độ dài đoạn MN.

b) Cho tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng

$$(AB + CD)^2 + (AD + BC)^2 > (AC + BD)^2$$

—HẾT—