

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Câu 1 (6,0 điểm).

a) Giải phương trình $\sin 4x + \cos x = 1 + \sin 3x + \sqrt{2} \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$.

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (y-1)\sqrt{x-y} + (x-y-1)\sqrt{y} = x-2 \\ x\sqrt{y^2+8} = y\sqrt{x^2-8} + 8 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Câu 2 (3,0 điểm).

a) Giả sử $P(x) = (1+3x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, với $n \in \mathbb{N}^*$.

Biết rằng $a_2 + a_3 = 405(n-1)$, tính giá trị của a_6 .

b) Cho tập hợp $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$. Gọi S là tập hợp các số tự nhiên gồm 8 chữ số đôi một khác nhau lấy từ A . Tính xác suất để lấy được số tự nhiên mà tổng 4 chữ số đầu bằng tổng 4 chữ số cuối.

Câu 3 (3,0 điểm). Cho dãy số (u_n) được xác định bởi
$$\begin{cases} u_1 = -2021 \\ u_{n+1} = u_n - 2021 \quad (n \geq 1) \end{cases}$$

Đặt $S_n = \frac{1}{u_1\sqrt{-u_2} + u_2\sqrt{-u_1}} + \frac{1}{u_2\sqrt{-u_3} + u_3\sqrt{-u_2}} + \dots + \frac{1}{u_n\sqrt{-u_{n+1}} + u_{n+1}\sqrt{-u_n}}$. Tính $\lim S_n$.

Câu 4 (6,0 điểm). Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng $2a$. Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Gọi M là trung điểm của AB , H là hình chiếu vuông góc của C lên SB và góc tạo bởi đường thẳng AB và mặt phẳng (HCM) bằng 60° .

a) Tính diện tích tam giác HCM .

b) Tính sin của góc tạo bởi MH và SC .

Câu 5 (2,0 điểm). Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn $a < b$ và $\frac{1+ab}{b-a} \leq 2\sqrt{2}$. Tìm giá

trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{(1+a^2)(1+b^2)}{a^2+ab}$.

-----Hết-----

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

Chữ kí giám thị số 1: Chữ kí giám thị số 2:

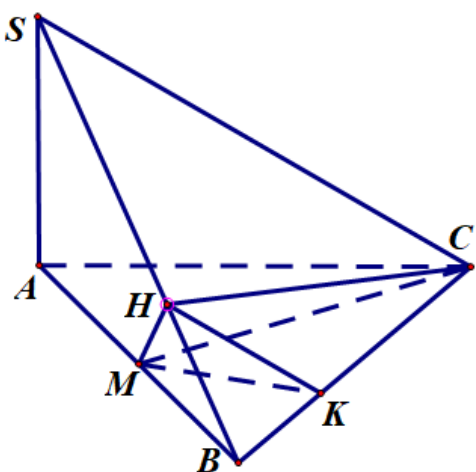
HƯỚNG DẪN CHẤM THI MÔN TOÁN LỚP 11 THPT

(Hướng dẫn chấm gồm 04 trang)

Chú ý: Những cách giải khác HDC mà đúng thì cho điểm theo thang điểm đã định.

Câu	Nội dung	Điểm
1 (6,0 đ)	a) Giải phương trình $\sin 4x + \cos x = 1 + \sin 3x + \sqrt{2} \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$	
	PT $\Leftrightarrow \sin 4x + \cos x = 1 + \sin 3x + \cos 2x - \sin 2x$	0,5
	$\Leftrightarrow 2\sin 3x \cos x - \sin 3x + \cos x - 1 - (2\cos^2 x - 1) = 0$	0,5
	$\Leftrightarrow \sin 3x(2\cos x - 1) + \cos x - 2\cos^2 x = 0$	0,5
	$\Leftrightarrow (2\cos x - 1)(\sin 3x - \cos x) = 0$	0,5
	Với $\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$	0,5
	Với $\sin 3x = \cos x \Leftrightarrow \sin 3x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}$	0,5
	b) $\begin{cases} (y-1)\sqrt{x-y} + (x-y-1)\sqrt{y} = x-2 & (1) \\ x\sqrt{y^2+8} = y\sqrt{x^2-8} + 8 & (2) \end{cases}$	
	Điều kiện $x-y \geq 0, y \geq 0, x^2-8 \geq 0$ Phương trình (1) $\Leftrightarrow (y-1)\sqrt{x-y} + (x-y-1)\sqrt{y} = y-1+x-y-1$ $\Leftrightarrow (y-1)(\sqrt{x-y}-1) + (x-y-1)(\sqrt{y}-1) = 0$	0,5
	$\Leftrightarrow \frac{(y-1)(x-y-1)}{\sqrt{x-y}+1} + \frac{(x-y-1)(y-1)}{\sqrt{y}+1} = 0$	0,5
	$\Leftrightarrow (y-1)(x-y-1)\left(\frac{1}{\sqrt{x-y}+1} + \frac{1}{\sqrt{y}+1}\right) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} y-1=0 \\ x-y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ y=x-1 \end{cases} \quad (\text{do } \frac{1}{\sqrt{x-y}+1} + \frac{1}{\sqrt{y}+1} > 0)$	0,5
	Với $y=1$ thế vào (2) ta được: $3x = \sqrt{x^2-8} + 8 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{8}{3} \\ 9x^2 - 48x + 64 = x^2 - 8 \end{cases} \Leftrightarrow x=3$	0,5

	Với $y = x - 1$ thế vào (2) ta được: $x\sqrt{x^2 - 2x + 9} = (x - 1)\sqrt{x^2 - 8} + 8$ $\Leftrightarrow x^2(x^2 - 2x + 9) = \left[(x - 1)\sqrt{x^2 - 8} + 8\right]^2$ $\Leftrightarrow 2x^2 - 2x - 7 - 2(x - 1)\sqrt{x^2 - 8} = 0 \Leftrightarrow \left(x - 1 - \sqrt{x^2 - 8}\right)^2 = 0$	0,5
	$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 8} = x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 8 = (x - 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{9}{2}$ Với $x = \frac{9}{2} \Rightarrow y = \frac{7}{2}$ Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x; y) = \left\{(3; 1), \left(\frac{9}{2}; \frac{7}{2}\right)\right\}$	0,5
2 (3,0 đ)	a) Ta có $P(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k 3^k \cdot x^k \Rightarrow a_k = C_n^k \cdot 3^k$	
	Theo giả thiết ta có $a_2 + a_3 = 405(n - 1) \Leftrightarrow 9C_n^2 + 27C_n^3 = 405(n - 1)$ Điều kiện $n \geq 3, n \in \mathbb{N}$ $\Leftrightarrow \frac{9}{2}n(n - 1) + \frac{9}{2}n(n - 1)(n - 2) = 405(n - 1)$	0,5
	$\Leftrightarrow n^2 - n - 90 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 10 \\ n = -9(L) \end{cases}$ Khi đó $a_6 = C_{10}^6 \cdot 3^6$	0,5
	b) Số tự nhiên gồm 8 chữ số đôi một khác nhau lấy từ A là $n(S) = 8! - 7!$	0,25
	Ta có $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$ nên để tổng của 4 chữ số đầu bằng tổng 4 chữ số cuối thì tổng của 4 chữ số phải bằng 14 Ta lập 4 bộ số có tổng bằng 14 có chứa chữ số 0 là: $\{0, 1, 6, 7\}, \{0, 2, 5, 7\}, \{0, 3, 4, 7\}, \{0, 3, 5, 6\}$ Với mỗi bộ số có chứa chữ số 0 trên tương ứng với bộ còn lại không chứa chữ số 0 và có tổng bằng 14	0,25
	TH1: Bộ có chữ số 0 đứng trước: có 4 bộ có chữ số 0, ứng với mỗi bộ có: +) Xếp 4 số đầu có $3.3!$ cách. +) Xếp 4 số cuối có $4!$ cách. Áp dụng qui tắc nhân có $4.3.3!.4! = 1728$ số.	0,5
	TH2: Bộ có chữ số 0 đứng sau: có 4 bộ có chữ số 0, ứng với mỗi bộ có: +) Xếp bộ không có chữ số 0 đứng trước có $4!$ cách. +) Xếp bộ có chữ số 0 đứng sau có $4!$ cách. Áp dụng qui tắc nhân có $4.4!.4! = 2304$ số.	0,5
	Gọi B là biến cố mà số tự nhiên mà tổng 4 chữ số đầu bằng tổng 4 chữ số cuối nên $n(B) = 1728 + 2304 = 4032$ số thỏa mãn yêu cầu	0,5

	bài toán. Vậy xác suất biến cố B là: $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{4}{35}$	
3 (3,0 đ)	Ta có $u_{n+1} = u_n - 2021 \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = -2021 < 0$ nên (u_n) là dãy số giảm Giả sử (u_n) bị chặn dưới tức là tồn tại $\lim u_n = a \leq -2021$ Qua giới hạn hai vế ta được $a = a - 2021$ (vô lý) tức là $\lim u_n = -\infty$	1,0
	Ta có $\frac{1}{u_n \sqrt{-u_{n+1}} + u_{n+1} \sqrt{-u_n}} = \frac{1}{-\sqrt{u_n u_{n+1}} (\sqrt{-u_n} + \sqrt{-u_{n+1}})}$	0,5
	$= \frac{\sqrt{-u_n} - \sqrt{-u_{n+1}}}{-\sqrt{u_n u_{n+1}} (u_{n+1} - u_n)} = -\frac{1}{2021} \left(\sqrt{-\frac{1}{u_n}} - \sqrt{-\frac{1}{u_{n+1}}} \right)$	0,5
	Khi đó $S_n = -\frac{1}{2021} \left(\sqrt{-\frac{1}{u_1}} - \sqrt{-\frac{1}{u_{n+1}}} \right) = -\frac{1}{2021} \left(\sqrt{\frac{1}{2021}} - \sqrt{-\frac{1}{u_{n+1}}} \right)$	0,5
	Vậy $\lim S_n = -\frac{1}{2021\sqrt{2021}}$	0,5
4 (6,0 đ)	a) Tính diện tích tam giác HCM . 	
	Ta có $\begin{cases} CM \perp SA \\ CM \perp AB \end{cases} \Rightarrow CM \perp (SAB) \Rightarrow CM \perp SB(1)$ Mặt khác $CH \perp SB(2)$. Từ (1) và (2) $\Rightarrow SB \perp (CMH)$	0,5
	Lại có $\begin{cases} AB \cap (HCM) = M \\ BH \perp (HCM) \end{cases} \Rightarrow (AB, (HCM)) = BMH = 60^\circ$	0,5
	Do $CM \perp (SAB) \Rightarrow CM \perp MH$ hay tam giác HCM vuông tại M	0,5
	Có $CM = a\sqrt{3}$; $BM = a \Rightarrow MH = MB \cdot \cos 60^\circ = \frac{a}{2}$	0,5
	Vậy diện tích tam giác HCM là $S_{\Delta HCM} = \frac{1}{2} CM \cdot MH = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$	0,5
	b) Tính sin của góc tạo bởi MH và SC .	

	Trong tam giác SBC dựng $HK // SC (K \in BC)$ Khi đó $(MH, SC) = (MH, HK)$	0,5
	Trong tam giác BMH có $BH = MB \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ Ta có $\Delta SAB \sim \Delta MHB \Rightarrow \frac{SA}{MH} = \frac{AB}{BH} \Rightarrow SA = \frac{AB \cdot MH}{BH} = \frac{2a \cdot \frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$	0,5
	$SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = \frac{4a\sqrt{3}}{3} = SC$	0,5
	$HK // SC \Rightarrow \frac{BH}{SB} = \frac{HK}{SC} = \frac{BK}{BC} \Rightarrow HK = BH = \frac{a\sqrt{3}}{2}; BK = \frac{3a}{4}$	0,5
	Trong tam giác MBK có $MK^2 = BM^2 + BK^2 - 2BM \cdot BK \cdot \cos 60^\circ \Rightarrow MK = \frac{a\sqrt{13}}{4}$	0,5
	Trong tam giác MHK có $\cos MHK = \frac{MH^2 + HK^2 - MK^2}{2MH \cdot HK} = \frac{\sqrt{3}}{8}$	0,5
	Vậy $\sin(MH, SC) = \sqrt{1 - \cos^2 MHK} = \frac{\sqrt{61}}{8}$	0,5
5 (2,0 đ)	Theo giả thiết ta được $2\sqrt{2}(b-a) \geq 1+ab \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{b}{a}} - \sqrt{\frac{a}{b}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$	0,5
	Đặt $t = \sqrt{\frac{b}{a}}, t > 0$ ta được $t - \frac{1}{t} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow t \geq \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{b}{a}} \geq \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{a}{b} \leq \frac{1}{2}$	0,5
	Ta có $P = \frac{(1+a^2)(1+b^2)}{a(a+b)} = \frac{(b-a)^2 + (ab+1)^2}{a(a+b)} \geq \frac{9(ab+1)^2}{8a(a+b)}$	0,5
	Mặt khác $\frac{9(ab+1)^2}{8a(a+b)} \geq \frac{9 \cdot 4ab}{8a(a+b)} = \frac{9}{2\left(\frac{a}{b} + 1\right)} \geq \frac{9}{2\left(\frac{1}{2} + 1\right)} = 3$ Vậy $P \geq 3 \Rightarrow \min P = 3 \Leftrightarrow a = \frac{1}{\sqrt{2}}, b = \sqrt{2}$	0,5