

I. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH (8,0 điểm)

Câu I. (3,0 điểm)

Tính các giới hạn sau

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 3n + 1}{3n^2 + n + 8}$

2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1} - 2}{x-1}$

Câu II. (2,0 điểm)

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 4x + 3}{x-1}, & \text{khi } x \neq 1 \\ ax + 1, & \text{khi } x = 1 \end{cases}$

Tìm giá trị của a để hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu III. (3,0 điểm)

Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với $(ABCD)$, $SA = a$, đáy $ABCD$ là hình vuông với $AB = a$. Lấy M, N lần lượt là trung điểm các cạnh SB và BC .

1. Chứng minh rằng $AB \perp (SAD)$, $(SAC) \perp (SBD)$.
2. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD) .
3. Tính góc giữa hai mặt phẳng (DMN) và $(ABCD)$.

II. PHẦN RIÊNG (2,0 điểm)

A. Theo chương trình Chuẩn

Câu IV.a. (1,5 điểm)

Cho hàm số $y = x^3 + 3x - 4$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến này song song với đường thẳng $d: y = 6x - 6$.

Câu V.a. (0,5 điểm) Tính giới hạn sau $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt[3]{x^3 + 2} \right)$.

B. Theo chương trình Nâng cao

Câu IV.b. (1,5 điểm)

Cho hàm số $y = \frac{x+1}{2x-1}$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến này vuông góc với đường thẳng $d: x - 3y - 3 = 0$.

Câu V.b. (0,5 điểm) . Chứng minh rằng phương trình sau có nghiệm với mọi giá trị của m

$$2013x + m(\sin 2x - \cos 2x) = 2014\pi.$$

----- HẾT -----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

	Lại có $\left. \begin{matrix} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{matrix} \right\} \Rightarrow BD \perp (SAC)$	0,25
	Mặt khác $BD \subset (SBD) \Rightarrow (SBD) \perp (SAC)$	0,25
III.2		1,0
	Kẻ $AH \perp SD (H \in SD)$ Mà $CD \perp (SAD)$ (Do $CD \parallel AB$) $\Rightarrow CD \perp AH \Rightarrow AH \perp (SCD) \Rightarrow d(A; (SCD)) = AH$	0,5
	Lại có $SA = AD = a \Rightarrow AH = \frac{SD}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Vậy $d(A; (SCD)) = \frac{a\sqrt{2}}{2}$	0,5
III.3		0,5
	Gọi I là trung điểm AB , $J = ND \cap CI$ Ta có $(DMN) \cap (ABCD) = DN$ Chứng minh được $CI \perp ND$, $MI \perp ND \Rightarrow (CMI) \perp ND \Rightarrow MJ \perp ND$ Suy ra góc giữa hai mặt phẳng (DMN) và $(ABCD)$ bằng góc giữa MJ và IJ bằng góc MJI	0,25
	Lại có: $CJ = \frac{CN \cdot CD}{ND} = a \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow IJ = CI - CJ = \frac{3a\sqrt{5}}{10}$; $MI = \frac{a}{2}$ $\Rightarrow \tan MJI = \frac{MI}{IJ} = \frac{\sqrt{5}}{3}$. Vậy góc giữa hai mặt phẳng (DMN) và $(ABCD)$ bằng góc φ với $\tan \varphi = \frac{\sqrt{5}}{3}$.	0,25
IV.a		1,5
	TXĐ: $\mathbb{R}$; $y' = 3x^2 + 3$	0,5
	Tiếp tuyến Δ của đồ thị (C) tại $M(x_0; y_0)$ có phương trình: $y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0$. Theo giả thiết ta có $\Delta \perp d \Rightarrow y'(x_0) = 6 \Leftrightarrow 3x_0^2 + 3 = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_0 = -1 \end{cases}$	0,5
	TH1: $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 0$, phương trình $\Delta: y = 6(x - 1) = 6x - 6$ (Loại)	0,25
	TH2: $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = -8$, phương trình $\Delta: y = 6(x + 1) - 8 = 6x - 2$ (Thỏa mãn)	0,25
V.a		0,5
	$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt[3]{x^3 + 2}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[(\sqrt{x^2 + x + 1} + x) + (\sqrt[3]{x^3 + 2} - x) \right]$	0,25
	$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2 + x + 1} - x} \right) + \left(\frac{2}{\sqrt[3]{(x^3 + 2)^2} + x \cdot \sqrt[3]{x^3 + 2} + x^2} \right) \right]$	
	$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\left(\frac{1 + \frac{1}{x}}{-\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1} \right) + \left(\frac{2}{\sqrt[3]{(x^3 + 2)^2} + x \cdot \sqrt[3]{x^3 + 2} + x^2} \right) \right] = -\frac{1}{2}$	0,25
IV.b		1,5
	TXĐ: $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$; $y' = \frac{-3}{(2x-1)^2}$; $d: x - 3y - 3 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}x - 1$.	0,5
	Tiếp tuyến Δ của đồ thị (C) tại $M(x_0; y_0)$ có phương trình: $y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0$. Theo giả thiết ta có $\Delta \perp d \Rightarrow y'(x_0) \cdot \frac{1}{3} = -1 \Rightarrow y'(x_0) = -3 \Leftrightarrow \frac{-3}{(2x_0-1)^2} = -3 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_0 = 0 \end{cases}$	0,5

	TH1: $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 2$, phương trình $\Delta: y = -3(x-1) + 2 = -3x - 1$.	0,25
	TH2: $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = -1$, phương trình $\Delta: y = -3(x+0) - 1 = -3x - 1$.	0,25
V.b		0,5
	TXĐ: $\mathbb{R}$. Phương trình đã cho $\Leftrightarrow 2013x + m(\sin 2x - \cos 2x) - 2014\pi = 0$ Đặt $f(x) = 2013x + m(\sin 2x - \cos 2x) - 2014\pi$ Ta có $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \Rightarrow f(x)$ liên tục trên $\left[\frac{\pi}{8}; \frac{9\pi}{8}\right]$	0,25
	$f\left(\frac{\pi}{8}\right) \cdot f\left(\frac{9\pi}{8}\right) = \left(\frac{2013\pi}{8} - 2014\pi\right) \left(9 \cdot \frac{2013\pi}{8} - 2014\pi\right) < 0$ Do đó phương trình đã cho có ít nhất 1 nghiệm trên $\left[\frac{\pi}{8}; \frac{9\pi}{8}\right]$ Vậy phương trình đã cho có nghiệm với mọi giá trị của m.	0,25