

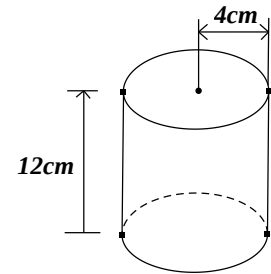
Câu I. (2 điểm):

Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} - \frac{2\sqrt{x}-4}{x-4}$ với $x \geq 0; x \neq 4$

1. Tính giá trị biểu thức A khi $x = 9$.
2. Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}$.
3. Đặt $P = A:B$. Tìm các giá trị của x để $2P = 2\sqrt{x}+1$.

Câu II. (2,5 điểm):

1. Quãng đường AB dài 6km. Một người đi xe đạp từ A đến B với vận tốc không đổi. Khi từ B trở về A người đó giảm vận tốc 3km/h so với lúc đi từ A đến B. Biết thời gian lúc đi ít hơn thời gian lúc về là 6 phút. Tính vận tốc của người đi xe đạp khi đi từ A đến B.
2. Một hộp sữa hình trụ có chiều cao 12cm, bán kính đáy là 4cm như hình vẽ bên. Tính diện tích vật liệu cần dùng để tạo nên vỏ hộp sữa đó (không tính phần ghép nối).



Câu III. (2 điểm):

1. Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} (x-1)(y+2) = xy-6 \\ (x+2)(y-3) = xy+1 \end{cases}$$
2. Cho phương trình : $x^2 - 2mx + m^2 + m - 1 = 0$ với m là tham số
a) Giải phương trình với $m = -3$
b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ sao cho $x_1^2 + x_2^2 = 3 - x_1x_2$.

Câu IV. (3,0 điểm):

Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O). Kẻ đường kính AD của đường tròn (O). Tiếp tuyến tại điểm D của đường tròn (O) cắt đường thẳng BC tại điểm K. Tia KO cắt AB tại điểm M, cắt AC tại điểm N. Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng BC

- 1) Chứng minh $CBD = CDK$ và $KD^2 = KB.KC$
- 2) Chứng minh tứ giác OHDK nội tiếp và $AON = BHD$
- 3) Chứng minh $OM = ON$

Bài V. (0,5 điểm): Cho $a, b \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $a^2 - ab + b^2 = a + b$. Tìm GTLN và GTNN của $P = 505a + 505b$

---HẾT---

HƯỚNG DẪN

Câu I. (2 điểm):

Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} - \frac{2\sqrt{x}-4}{x-4}$ với $x \geq 0; x \neq 4$

1. Tính giá trị biểu thức A khi $x = 9$.
2. Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}$.
3. Đặt $P = A : B$. Tìm các giá trị của x để $2P = 2\sqrt{x} + 1$.

Hướng dẫn

1. Khi $x = 9$ thì $\sqrt{x} = \sqrt{9} = 3$ suy ra $A = \frac{3-1}{3+2} = \frac{2}{5}$
2. $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} - \frac{2(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} - \frac{2}{(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}$
3. $P = A : B$
 $P = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} : \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2}$
 $2P = 2\sqrt{x} + 1 \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2} = 2\sqrt{x} + 1 \Leftrightarrow 2(\sqrt{x}-1) = (2\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)$
 $\Leftrightarrow 2x - 5\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 0 \\ 2\sqrt{x} - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 & (TMĐK) \\ x = \frac{25}{4} & (TMĐK) \end{cases}$

Câu II. (2,5 điểm):

1. Quảng đường AB dài 6km. Một người đi xe đạp từ A đến B với vận tốc không đổi. Khi từ B trở về A người đó giảm vận tốc 3km/h so với lúc đi từ A đến B. Biết thời gian lúc đi ít hơn thời gian lúc về là 6 phút. Tính vận tốc của người đi xe đạp khi đi từ A đến B.
2. Một hộp sữa hình trụ có chiều cao 12cm, bán kính đáy là 4cm như hình vẽ bên. Tính diện tích vật liệu cần dùng để tạo nên vỏ hộp sữa đó (không tính phần ghép nối).

Hướng dẫn

1. Gọi vận tốc của người đi xe đạp khi đi từ A đến B là x (km/h), $x > 3$.
Vận tốc của người đi xe đạp khi đi từ B về A là $x-3$ (km/h)
Thời gian người đó đi từ A đến B là $\frac{6}{x}$ (h)
Thời gian người đó đi từ B về A là $\frac{6}{x-3}$ (h)

Vì thời gian lúc đi ít hơn thời gian lúc về là 6 phút $= \frac{1}{10}$ (h) nên ta có phương trình:

$$\frac{6}{x-3} - \frac{6}{x} = \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow 10.6x - 10.6(x-3) = x(x-3)$$

$$\Leftrightarrow 60x - 60x + 180 = x^2 - 3x$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 180 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-15)(x+12) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 15 & (TM) \\ x = -12 & (KTM) \end{cases}$$

Vậy vận tốc của người đi xe đạp khi đi từ A đến B là 15 km/h.

2. Diện tích vật liệu cần dùng chính là diện tích toàn phần của hình trụ có chiều cao 12cm, bán kính đáy là 4cm. Do đó, diện tích vật liệu cần dùng là:

$$S = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi \cdot 4 \cdot 12 + 2\pi \cdot 4^2 = 402,124(\text{cm}^2)$$

Câu III. (2 điểm).

1. Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} (x-1)(y+2) = xy - 6 \\ (x+2)(y-3) = xy + 1 \end{cases}$$

2. Cho phương trình : $x^2 - 2mx + m^2 + m - 1 = 0$ với m là tham số

a) Giải phương trình với $m = -3$

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ sao cho $x_1^2 + x_2^2 = 3 - x_1x_2$.

Hướng dẫn

1. Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} (x-1)(y+2) = xy - 6 \\ (x+2)(y-3) = xy + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy + 2x - y - 2 = xy - 6 \\ xy - 3x + 2y - 6 = xy + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = -4 \\ -3x + 2y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2y = -8 \\ -3x + 2y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ 4x - 2y = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Vậy $(x, y) = (-1, 2)$ là nghiệm của hệ phương trình.

2. a) Giải phương trình với $m = -3$.

Thay $m = -3$ vào phương trình ta có : $x^2 + 6x + 5 = 0$ ($a = 1, b = 6, c = 5$) vì $a - b + c = 0$ nên phương trình có 2

nghiệm phân biệt :
$$\begin{cases} x = -1 \\ x = -5 \end{cases}$$

Vậy với $m = -3$ thì phương trình có 2 nghiệm phân biệt
$$\begin{cases} x = -1 \\ x = -5 \end{cases}$$

b) Để phương trình có 2 nghiệm phân biệt thì :

$$\Delta' = (b')^2 - ac > 0$$

$$\Leftrightarrow -m + 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow m < 1$$

Với $m < 1$ áp dụng Viet ta có :
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 \cdot x_2 = m^2 + m - 1 \end{cases}$$

Theo bài ra ta có :

$$x_1^2 + x_2^2 = 3 - x_1 \cdot x_2$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - x_1 \cdot x_2 - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3m^2 - m - 2 = 0 \quad (a + b + c = 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 1(l) \\ m = \frac{-2}{3} (t / m) \end{cases}$$

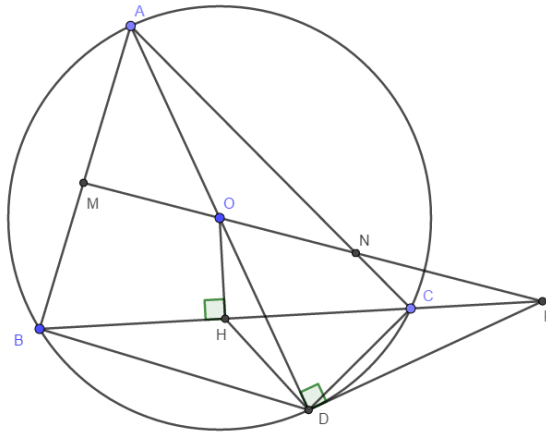
Vậy $m = \frac{-2}{3}$ thì phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 3 - x_1 \cdot x_2$ x

Câu IV. (3,0 điểm):

Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) . Kẻ đường kính AD của đường tròn (O) . Tiếp tuyến tại điểm D của đường tròn (O) cắt đường thẳng BC tại điểm K . Tia KO cắt AB tại điểm M , cắt AC tại điểm N . Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng BC

- 1) Chứng minh $CBD = CDK$ và $KD^2 = KB \cdot KC$
- 2) Chứng minh tứ giác $OHDK$ nội tiếp và $AON = BHD$
- 3) Chứng minh $OM = ON$

Hướng dẫn



1) Xét (O) có CDK là góc tạo bởi tia tiếp tuyến DK và dây cung chắn CD ; CBD là góc nội tiếp chắn $CD \Rightarrow CDK = CBD$

Xét ΔKDC và ΔKBD có: K chung; $KDC = KBD$ (cmt) $\Rightarrow \Delta KDC \sim \Delta KBD$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{KD}{KB} = \frac{KC}{KD} \Rightarrow KD^2 = KB.KC$$

2) Xét (O) : H là trung điểm của dây $BC \Rightarrow OH \perp BC \Rightarrow OHK = 90^\circ \Rightarrow H \in$ đường tròn đường kính OK

Mà $KDO = 90^\circ$ (do DK là tiếp tuyến của (O)) $\Rightarrow D \in$ đường tròn đường kính OK

Vậy tứ giác $OHDK$ nội tiếp đường tròn đường kính OK

$\Rightarrow DHK = DOK$ (2 góc nội tiếp cùng chắn DK của đường tròn ngoại tiếp $OHDK$)

$$\Rightarrow BHD = AON \left(= 180^\circ - DHK = 180^\circ - DOK \right)$$

3) Có $MOA = DOK$ (đối đỉnh); $DOK = DHC$ (chứng minh câu 2) $\Rightarrow MOA = DHC$

Xét ΔAMO và ΔCDH có: $MOA = DHC$ (cmt); $MAO = DCH$ (2 góc nội tiếp cùng chắn BD của (O))

$$\Rightarrow \Delta AMO \sim \Delta CDH \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{OM}{HD} = \frac{AO}{CH} \quad (1)$$

Xét và ΔBDH có: $AON = BHD$ (chứng minh câu 2); $NAO = DBH$ (2 góc nội tiếp cùng chắn CD của (O)) (g.g) $\Rightarrow \frac{ON}{HD} = \frac{AO}{BH} \quad (2) \Rightarrow \Delta ANO \sim \Delta BDH$ Mà (3)

$$\text{Từ (1) (2) (3)} \Rightarrow \frac{OM}{HD} = \frac{ON}{HD} \Rightarrow OM = ON \text{ (đpcm)}$$

Bài V.(0,5 điểm): Cho $a, b \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $a^2 - ab + b^2 = a + b$. Tìm GTLN và GTNN của $P = 505a + 505b$

Hướng dẫn

Ta có: $(a-b)^2 \geq 0 \quad \forall a, b \in R \Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow ab \leq \frac{(a+b)^2}{4} \quad \forall a, b \in R$

Khi đó, $a^2 - ab + b^2 = (a+b)^2 - 3ab \geq (a+b)^2 - 3 \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(a+b)^2}{4}$

Đặt: $t = a+b \Rightarrow a^2 - ab + b^2 = a+b \geq \frac{(a+b)^2}{4} \Leftrightarrow t \geq \frac{t^2}{4} \Leftrightarrow t(t-4) \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq t \leq 4$

Ta có : $P = 505a + 505b = 505(a+b) = 505t$

Từ điều kiện $0 \leq t \leq 4 \Rightarrow 0 \leq 505.t \leq 505.4 \Leftrightarrow 0 \leq P \leq 2020$

Vậy, $MinP = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ t = a+b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 0$

$MaxP = 2020 \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ t = a+b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 2.$

---HẾT---