

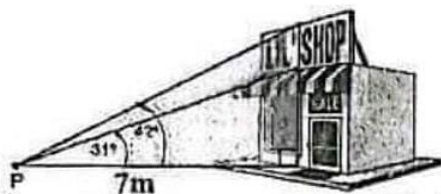
Bài 1 (2,0 điểm).

Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}}{4-x}$ và $B = \frac{x}{\sqrt{x}+2} + \frac{x+\sqrt{x}}{x+3\sqrt{x}+2}$, với $x > 0; x \neq 4$.

- Tìm các giá trị của x để $A = \frac{-3}{5}$.
- Rút gọn biểu thức $P = B : A$.
- Tìm số thực dương x sao cho P đạt giá trị lớn nhất.

Bài 2 (1,0 điểm).

Một người muốn làm biển quảng cáo cho cửa hàng. Biết rằng từ điểm P cách cửa hàng 7m thì người đó nhìn thấy mái nhà dưới một góc 31° so với phương ngang (như hình vẽ). Cũng từ điểm P người đó sẽ nhìn thấy điểm trên cùng của bảng quảng cáo theo một góc 42° so với phương ngang. Tính chiều cao của biển quảng cáo theo đơn vị m. (lấy sấp xỉ đến một chữ số sau dấu phẩy).



Bài 3 (2,5 điểm).

Trên mặt phẳng tọa độ xOy , cho đường thẳng (d_m) có phương trình $y = mx - 2m + 1$ (với m là tham số).

- Tìm m để (d_m) song song với đường thẳng có phương trình $y = -x + 3m$.
- Tìm m để (d_m) cắt hai trục Ox và Oy lần lượt tại A và B phân biệt sao cho $\sin \widehat{BAO} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Bài 4 (3,5 điểm).

Cho hai đường tròn (O) và (O') thay đổi nhưng luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B cố định. Gọi M là trung điểm OO' và điểm T đối xứng với A qua M . Đường tròn tâm T bán kính TA tương ứng cắt các đường tròn (O) và (O') tại các giao điểm thứ hai E và F .

- Chứng minh rằng các đường thẳng TB và OO' song song với nhau.
- Chứng minh rằng AE là một tiếp tuyến của đường tròn (O') .
- Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF luôn đi qua một điểm cố định, khác A , khi hai đường tròn (O) và (O') thay đổi, nhưng luôn đi qua A, B .
- Trên đường tròn (O) lấy điểm P bất kỳ sao cho PA cắt (O') tại giao điểm thứ hai là Q . Chứng minh rằng $TP = TQ$.

Bài 5 (1,0 điểm).

- Giải phương trình $x + \sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} + 4$.
- Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $z = (x-2y)(y-2x)$.

Chứng minh rằng $\frac{9}{xy+xz} + \frac{9}{xy+yz} + \frac{x^3+y^3}{z} \geq \frac{11}{2}$.

----- HẾT -----

Chú ý. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

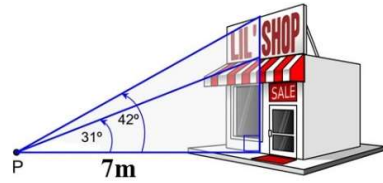
Bài 1 (2,0 điểm).

Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}}{4-x}$ và $B = \frac{x}{\sqrt{x}+2} + \frac{x+\sqrt{x}}{x+3\sqrt{x}+2}$, với $x > 0; x \neq 4$.

- Tìm các giá trị của x để $A = \frac{-3}{5}$.
- Rút gọn biểu thức $P = B : A$.
- Tìm số thực dương x sao cho P đạt giá trị lớn nhất.

Bài 2 (3,5 điểm).

1) Một người muốn làm biển quảng cáo cho cửa hàng. Biết rằng từ điểm P cách cửa hàng 7m thì nhìn thấy mái nhà dưới một góc 31° so với phương ngang (như hình vẽ). Cũng từ điểm P sẽ nhìn thấy điểm trên cùng của bảng quảng cáo theo một góc 42° so với phương ngang. Tính chiều cao của biển quảng cáo theo đơn vị m. (lấy sấp xỉ đến 1 chữ số sau dấu phẩy).



2) Trên hệ tọa độ xOy, cho đường thẳng (d_m) có phương trình $y = mx - 2m + 1$ (với m là tham số).

- Tìm m để (d_m) song song với đường thẳng có phương trình $y = -x + 3m$.
- Tìm m để (d_m) cắt 2 trục Ox và Oy lần lượt tại A và B phân biệt thỏa mãn

$$\sin \widehat{BAO} = \frac{\sqrt{5}}{5}, \text{ với O là gốc tọa độ.}$$

Bài 3 (3,5 điểm).

Cho hai đường tròn (O) và (O') thay đổi nhưng luôn cắt nhau tại 2 điểm A và B cố định. Gọi M là trung điểm OO' và điểm T đối xứng A qua M. Vẽ đường tròn tâm T bán kính TA cắt (O) và (O') tại các giao điểm thứ hai lần lượt là E và F.

- Chứng minh $TB \parallel OO'$.
- Chứng minh AE là tiếp tuyến của (O).
- Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF luôn đi qua 1 điểm cố định khi (O) và (O') thay đổi.
- Trên (O) lấy điểm P bất kỳ sao cho PA cắt (O') tại giao điểm thứ hai là Q. Chứng minh $TP = TQ$.

Bài 4 (1,0 điểm).

- Giải phương trình $x + \sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} + 4$.
- Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $z = (x-2y)(y-2x)$.

$$\text{Chứng minh: } \frac{9}{xy+xz} + \frac{9}{xy+yz} + \frac{x^3+y^3}{z} \geq \frac{11}{2}.$$

----- HẾT -----

Bài 1 (2,0 điểm).

Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}}{4-x}$ và $B = \frac{x}{\sqrt{x}+2} + \frac{x+\sqrt{x}}{x+3\sqrt{x}+2}$, với $x > 0; x \neq 4$.

a) Tìm các giá trị của x để $A = \frac{-3}{5}$.

b) Rút gọn biểu thức $P = B : A$.

c) Tìm số thực dương x sao cho P đạt giá trị lớn nhất.

HDC:

a) $A = \frac{-3}{5} \Leftrightarrow 5\sqrt{x} = 3x - 12 \Leftrightarrow 3x - 5\sqrt{x} - 12 = 0$ (0,25đ)

$\Leftrightarrow (\sqrt{x} - 3)(3\sqrt{x} + 4) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 9(tmDK)$

Kết luận $x = 9$. (0,25đ)

b)

$P = \frac{x(\sqrt{x}+1)+x+\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)} \cdot \frac{4-x}{\sqrt{x}}$ (0,25đ)

$P = \frac{\sqrt{x}(x+2\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)} \cdot \frac{4-x}{\sqrt{x}}$ (0,25đ)

$P = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)} \cdot \frac{4-x}{\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x}+1)(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})}{\sqrt{x}+2}$ (0,25đ)

$P = (\sqrt{x}+1)(2-\sqrt{x}) = -x + \sqrt{x} + 2$ (0,25đ)

c) $P = -x + \sqrt{x} + 2 = \frac{5}{4} - \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{5}{4}$ (0,25đ)

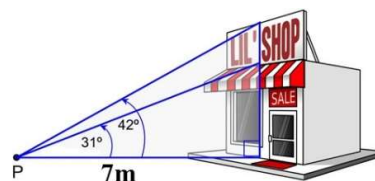
KL: P lớn nhất là $5/4$, dấu bằng xảy ra khi $x = 1/4$. (0,25đ)

Bài 2 (3,5 điểm).

1) Một người muốn làm biển quảng cáo cho cửa hàng.

Biết rằng từ điểm P cách cửa hàng 7m thì người đó nhìn thấy mái nhà dưới một góc 31° so với phương ngang (như hình vẽ). Cũng từ điểm P người đó sẽ nhìn thấy điểm trên

cùng của bảng quảng cáo theo một góc 42° so với phương ngang. Tính chiều cao của biển quảng cáo theo đơn vị m. (lấy sấp xỉ đến 1 chữ số sau dấu phẩy).



HDC:

Vẽ hình mô tả và gọi tên các điểm. (0, 25đ)

Tính chiều cao biển quảng cáo $7 \cdot \tan 42^\circ - 7 \cdot \tan 31^\circ = 2,1$ (m) (0, 5đ)

KL chiều cao tấm biển quảng cáo sấp xỉ là 2,1m.

(0,25đ)

2) Trên hệ tọa độ xOy, cho đường thẳng (d_m) có phương trình $y = mx - 2m + 1$ (với m là tham số).

a) Tìm m để (d_m) song song với đường thẳng có phương trình $y = -x + 3m$.

HDC:

Để (d_m) song song với đường thẳng có phương trình $y = -x + 3m$ thì

$$\begin{cases} m = -1 \\ -2m + 1 \neq 3m \end{cases} \quad (0,75đ)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m \neq \frac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow m = -1 \quad (0,5đ)$$

$$\text{KL: } m = -1. \quad (0,25đ)$$

b) Tìm m để (d_m) cắt 2 trục Ox và Oy lần lượt tại A và B thỏa mãn $\sin \widehat{BAO} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

HDC:

Giao điểm của (d_m) cắt Oy là B(0; $-2m + 1$)

Giao điểm của (d_m) cắt Ox là A($\frac{2m-1}{m}$; 0) với điều kiện m khác 0. (0,25đ)

Suy ra $OA = |\frac{2m-1}{m}|$ và $OB = |-2m + 1| = |2m - 1|$

$$\sin \widehat{BAO} = \frac{\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow \frac{OB}{AB} = \frac{\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow AB^2 = 5OB^2$$

Theo Pitago

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 \Rightarrow OA = 2OB$$

$$\Leftrightarrow |\frac{2m-1}{m}| = 2|2m-1| \quad (0,25đ)$$

*Nếu $2m - 1 = 0$ thì A và B trùng nhau tại gốc tọa độ $\Rightarrow$ Loại (0,25đ)

*Nếu $2m - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{1}{2}$ thì $|\frac{1}{m}| = 2 \Leftrightarrow m \in \{\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\}$

$$\text{KL: } m = -\frac{1}{2} \quad (0,25đ)$$

Bài 3 (3,5 điểm).

Cho hai đường tròn (O) và (O') thay đổi nhưng luôn cắt nhau tại 2 điểm A và B cố định. Gọi M là trung điểm OO' và điểm T đối xứng A qua M. Vẽ đường tròn tâm T bán kính TA cắt (O) và (O') tại các giao điểm thứ hai lần lượt là E và F.

a) Chứng minh TB // OO'.

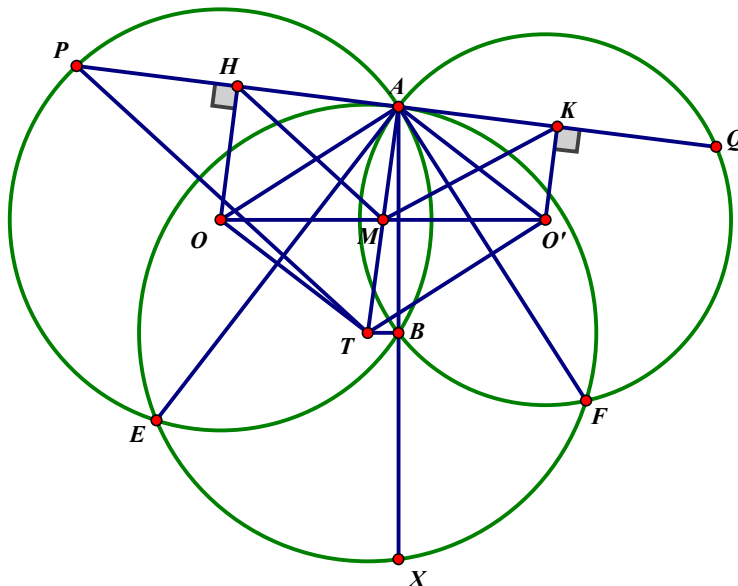
b) Chứng minh AE là tiếp tuyến của (O).

c) Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF luôn đi qua 1 điểm cố định khi (O) và (O') thay đổi.

d) Trên (O) lấy điểm P bất kỳ sao cho PA cắt (O') tại giao điểm thứ hai là Q.

Chứng minh TP = TQ.

HDC:



- a) Theo tính chất hai đường tròn cắt nhau ta có OO' là trung trực AB (0,25đ)
 Gọi N là trung điểm $AB \Rightarrow MN$ là đường trung bình tam giác ABT (0,25đ)
 $\Rightarrow MN \parallel TB$ (0,25đ)
 KL: $TB \parallel OO'$ (0,25đ)
 b) (gt) suy ra $AOTO'$ là hình bình hành (0,25đ)
 $\Rightarrow OT \parallel AO'$ (0,25đ)
 (T) và (O) cắt nhau tại A và E $\Rightarrow OT$ vuông góc AE
 Kết hợp suy ra AE vuông góc AO' (0,25đ)
 KL: AE là tiếp tuyến (O') (0,25đ)
 c) Lấy X đối xứng A qua B, suy ra X cố định (0,25đ)
 Suy ra TB là trung trực AX (0,25đ)
 Suy ra $TX = TA$ (0,25đ)
 Suy (T) luôn đi qua X là điểm cố định (0,25đ)
 d) Hạ các đường vuông góc OH, $O'K$ và MS xuống PQ
 Suy ra $HP = HA$, $KQ = KA$ và $SH = SK$
 Suy ra M thuộc trung trực HK $\Rightarrow MH = MK$ (0,25đ)
 Mà $MH = 1/2TP$, $MK = 1/2TQ$ (đường trung bình)
 Suy ra $TP = TQ$ (0,25đ)

Bài 4 (1,0 điểm).

1) Giải phương trình $x + \sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} + 4$.

HDC:

ĐKXĐ: $x \geq 1$.

Đặt $a = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} \Rightarrow a^2 = 2x + 2\sqrt{x^2 - 1}$

PT $a^2 = 2a + 8 \Leftrightarrow (a-1)^2 = 9 \Leftrightarrow a = 4; -2$

Do $a > 0$ nên $a = 4$

$$\begin{aligned}
2\sqrt{x^2-1} &= 16-2x \\
\Leftrightarrow \sqrt{x^2-1} &= 8-x, (x \leq 8) \\
\Leftrightarrow x^2-1 &= 64-16x+x^2 \\
\Leftrightarrow x &= \frac{65}{16}
\end{aligned}
\tag{0,25}$$

$$\text{KL: } x = 65/16 \tag{0,25}$$

2) Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $z = (x-2y)(y-2x)$.

$$\text{Chứng minh: } \frac{9}{xy+xz} + \frac{9}{xy+yz} + \frac{x^3+y^3}{z} \geq \frac{11}{2}.$$

HDC:

$$\text{Ta có } 5xy = 2x^2 + 2y^2 + z \geq 4xy + z \Rightarrow xy \geq z$$

$$+) \quad \frac{x^3+y^3}{z} = \frac{(x+y)(x^2+y^2-xy)}{z} \geq \frac{(x+y)xy}{z} \geq x+y \quad (1)$$

$$+) \quad \text{Áp dụng bất quen thuộc } \frac{1}{A} + \frac{1}{B} \geq \frac{4}{A+B}; (A, B > 0)$$

$$\Rightarrow \frac{9}{xy+xz} + \frac{9}{xy+yz}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \frac{36}{2xy+z(x+y)} \geq \frac{36}{xy(2+x+y)} \\
&\geq \frac{36}{(2+x+y) \frac{(x+y)^2}{4}} = \frac{144}{(x+y)^2(2+x+y)} \quad (0,25đ)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow P \geq \frac{144}{(x+y)^2(x+y+2)} + x+y$$

$$\Rightarrow P \geq \frac{144}{(x+y+2)(x+y)^2} + \frac{x+y+2}{4} - \frac{1}{2} + \frac{3(x+y)}{4}$$

$$\frac{144}{(x+y+2)(x+y)^2} + \frac{x+y+2}{4} \geq 2\sqrt{\frac{144}{(x+y+2)(x+y)^2} \cdot \frac{x+y+2}{4}} \geq \frac{12}{x+y}$$

$$\Rightarrow P \geq \frac{12}{x+y} + \frac{3(x+y)}{4} - \frac{1}{2} \geq 2\sqrt{\frac{12}{x+y} \cdot \frac{3(x+y)}{4}} - \frac{1}{2} = \frac{11}{2}$$

$$\text{Vậy } P_{\min} = \frac{11}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y=2 \\ z=4 \end{cases} \quad (0,25đ)$$