

Thời gian làm bài: 90 phút (không kể thời gian giao đề)

Câu 1. (2,0 điểm)

1) Tính giá trị biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$ khi $x = 9$

2) Rút gọn biểu thức $B = \frac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+1} - \frac{1}{1-\sqrt{x}} + \frac{8}{x-1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$

3) Tìm x để $P = A.B$ có giá trị nguyên

Câu 2. (2,0 điểm) Giải các hệ phương trình sau:

a)
$$\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 2\sqrt{x+1} - 3\sqrt{y-2} = 5 \\ 4\sqrt{x+1} + \sqrt{y-2} = 17 \end{cases}$$

Câu 3. (2,0 điểm) Giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình:

Hai vòi nước cùng chảy vào bể không có nước thì sau 12 giờ đầy bể. Nếu người ta mở cả hai vòi chảy trong 4 giờ rồi khóa vòi hai lại và để vòi một chảy tiếp 14 giờ nữa thì mới đầy bể. Tính thời gian mỗi vòi chảy một mình đầy bể.

Câu 4 (3,5 điểm). Cho đường tròn $(O; R)$ và đường thẳng d không có điểm chung với đường tròn. Từ điểm M thuộc đường thẳng d kẻ hai tiếp tuyến MA, MB tới đường tròn. Hạ OH vuông góc với đường thẳng d tại H . Nối AB cắt OH tại K , cắt OM tại I . Tia OM cắt đường tròn $(O; R)$ tại E .

a) Chứng minh $AOBM$ là tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh $OI.OM = OK.OH$

c) Chứng minh E là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MAB

d) Tìm vị trí của M trên đường thẳng d để diện tích tam giác OIK có giá trị lớn nhất.

Câu 5 (0,5 điểm). Cho hai số dương x, y thỏa mãn $x + y = 1$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{y}\right)^2$

 HẾT

HƯỚNG DẪN

Câu 1. (2,0 điểm)

1) Tính giá trị biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$ khi $x = 9$

2) Rút gọn biểu thức $B = \frac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+1} - \frac{1}{1-\sqrt{x}} + \frac{8}{x-1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$

3) Tìm x để $P = A.B$ có giá trị nguyên

Hướng dẫn

1) Tính giá trị biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$ khi $x = 9$

Điều kiện: $x \geq 0$. Ta có: $x = 9$ (thỏa mãn)

Thay $x = 9$ vào A : $A = \frac{\sqrt{9}-1}{\sqrt{9}+1} = \frac{1}{2}$.

Vậy $x = 9$ thì giá trị của A bằng $\frac{1}{2}$.

2) Rút gọn biểu thức $B = \frac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+1} - \frac{1}{1-\sqrt{x}} + \frac{8}{x-1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$

$$\begin{aligned} B &= \frac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+1} + \frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{8}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{(\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-1) + \sqrt{x}+1+8}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{x+4\sqrt{x}-5+\sqrt{x}+1+8}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{x+5\sqrt{x}+4}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+4)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-1} \end{aligned}$$

3) Tìm x để $P = A.B$ có giá trị nguyên

Điều kiện: $x \geq 0; x \neq 1$

$$P = A.B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \cdot \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+1} = 1 + \frac{3}{\sqrt{x}+1}$$

$$\text{Ta có: } x \geq 0, x \neq 1 \Rightarrow \sqrt{x}+1 \geq 1 > 0 \Rightarrow \frac{3}{\sqrt{x}+1} > 0 \Rightarrow 1 + \frac{3}{\sqrt{x}+1} > 1 \Rightarrow P > 1$$

$$\sqrt{x}+1 \geq 1 > 0 \Rightarrow \frac{3}{\sqrt{x}+1} \leq 3 \Rightarrow 1 + \frac{3}{\sqrt{x}+1} \leq 4 \Rightarrow P \leq 4$$

Vậy: $1 < P \leq 4$. Do $P \in \mathbb{Z} \Rightarrow P \in \{2; 3; 4\}$

$$\text{TH1: } P = 2 \Rightarrow 1 + \frac{3}{\sqrt{x}+1} = 2 \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{x}+1} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x}+1 = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4 \text{ (t/m)}$$

$$\text{TH2: } P = 3 \Rightarrow 1 + \frac{3}{\sqrt{x}+1} = 3 \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{x}+1} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x}+1 = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} \text{ (t/m)}$$

$$\text{TH3: } P = 4 \Rightarrow 1 + \frac{3}{\sqrt{x}+1} = 4 \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{x}+1} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x}+1 = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ (t/m)}$$

$$\text{Vậy: } x \in \left\{0; 4; \frac{1}{4}\right\}$$

Câu 2. (2,0 điểm) Giải các hệ phương trình sau:

$$\text{a) } \begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2\sqrt{x+1} - 3\sqrt{y-2} = 5 \\ 4\sqrt{x+1} + \sqrt{y-2} = 17 \end{cases}$$

Hướng dẫn

$$\text{a) } \begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 2y = 10 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 14 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 2 + 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất: $(x; y) = (2; 1)$

$$\text{b) } \begin{cases} 2\sqrt{x+1} - 3\sqrt{y-2} = 5 \\ 4\sqrt{x+1} + \sqrt{y-2} = 17 \end{cases}$$

Điều kiện: $x \geq -1; y \geq 2$

$$\begin{aligned} &\begin{cases} 2\sqrt{x+1} - 3\sqrt{y-2} = 5 \\ 4\sqrt{x+1} + \sqrt{y-2} = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x+1} - 3\sqrt{y-2} = 5 \\ 12\sqrt{x+1} + 3\sqrt{y-2} = 51 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x+1} - 3\sqrt{y-2} = 5 \\ 14\sqrt{x+1} = 56 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x+1} - 3\sqrt{y-2} = 5 \\ \sqrt{x+1} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cdot 4 - 3\sqrt{y-2} = 5 \\ \sqrt{x+1} = 4 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{y-2} = 1 \\ \sqrt{x+1} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - 2 = 1 \\ x + 1 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \text{ (t/m)} \\ x = 15 \text{ (t/m)} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất: $(x, y) = (15; 3)$.

Câu 3. (2,0 điểm) Giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình:

Hai vòi nước cùng chảy vào bể không có nước thì sau 12 giờ đầy bể. Nếu người ta mở cả hai vòi chảy trong 4 giờ rồi khóa vòi hai lại và để vòi một chảy tiếp 14 giờ nữa thì mới đầy bể. Tính thời gian mỗi vòi chảy một mình đầy bể.

Hướng dẫn

Gọi thời gian vòi một và vòi hai chảy một mình đầy bể lần lượt là x, y (giờ) ($x > 0, y > 0$)

Mỗi giờ vòi một và vòi hai chảy được $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}$ (bể)

Do cả hai vòi cùng chảy thì sau 12 giờ sẽ đầy bể nên ta có phương trình:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12} \quad (1)$$

Vì mở cả hai vòi trong 4 giờ sau đó khóa vòi hai để vòi một chảy một mình tiếp 14 giờ đầy bể nên ta có phương trình: $\frac{1}{3} + 14 \cdot \frac{1}{x} = 1 \quad (2)$

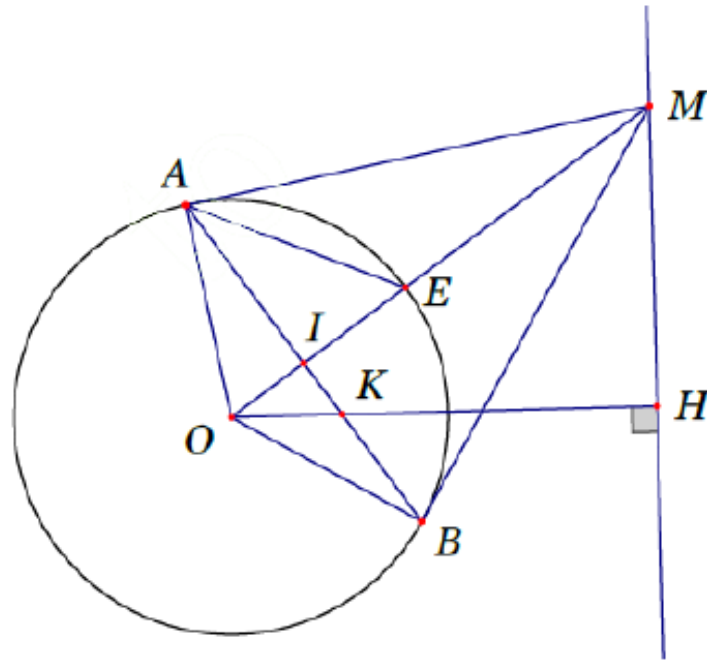
$$\text{Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: } \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12} \\ \frac{1}{3} + 14 \cdot \frac{1}{x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 21 & (t / m) \\ y = 28 & (t / m) \end{cases}$$

Vậy thời gian vòi một chảy một mình đầy bể là 21 giờ, vòi hai chảy một mình đầy bể là 28 giờ.

Câu 4 (3,5 điểm). Cho đường tròn $(O; R)$ và đường thẳng d không có điểm chung với đường tròn. Từ điểm M thuộc đường thẳng d kẻ hai tiếp tuyến MA, MB tới đường tròn. Hạ OH vuông góc với đường thẳng d tại H . Nối AB cắt OH tại K , cắt OM tại I . Tia OM cắt đường tròn $(O; R)$ tại E .

- Chứng minh $AOBM$ là tứ giác nội tiếp
- Chứng minh $OI \cdot OM = OK \cdot OH$
- Chứng minh E là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MAB
- Tìm vị trí của M trên đường thẳng d để diện tích tam giác OIK có giá trị lớn nhất.

Hướng dẫn



a) Chứng minh AOBM là tứ giác nội tiếp

Xét tứ giác AOBM có: $\angle MAO + \angle MBO = 180^\circ$

Mà hai góc này ở vị trí đối nhau. Suy ra AOBM là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh $OI \cdot OM = OK \cdot OH$

Ta có: $\triangle OIK \sim \triangle OHM$ (g - g)

$$\frac{OI}{OH} = \frac{OK}{OM} \Rightarrow OI \cdot OM = OH \cdot OK \text{ (đpcm)}$$

c) Chứng minh E là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MAB

- Xét (O) có $\angle AOE = \angle BOE$ (t/c 2 tiếp tuyến cắt nhau)

Sđ cung AE = sđ cung BE $\Rightarrow \angle BAE = \angle MAE$

- Xét $\triangle ABM$ có:

+) MO là phân giác thứ nhất (t/c 2 tiếp tuyến cắt nhau)

+) AE là phân giác thứ hai (cmt)

+) MO cắt AE tại E $\Rightarrow E$ là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle AMB$ (đpcm)

d) Tìm vị trí của M trên đường thẳng d để diện tích tam giác OIK có giá trị lớn nhất.

$$\text{Có: } OH \cdot OK = OI \cdot OM = OB^2 = R^2 \Rightarrow OH \cdot OK = R^2 \Rightarrow OK = \frac{R^2}{OH}$$

Mà OH không đổi, nên OK không đổi.

Ta có: $S_{OIK} = \frac{1}{2}OI.IK \leq \frac{1}{4}(OI^2 + IK^2) = \frac{1}{4}OK^2 = const$

Để diện tích tam giác OIK đạt giá trị lớn nhất thì $OI = IK$. Khi đó: $1 = \frac{OI}{IK} = \frac{OH}{HM}$

Suy ra $OH = HM$.

Vậy điểm M nằm trên đường thẳng (d) sao cho $OH = HM$ thì diện tích tam giác OIK đạt giá trị lớn nhất.

Câu 5 (0,5 điểm). Cho hai số dương x, y thỏa mãn $x + y = 1$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{y}\right)^2$

Hướng dẫn

Ta có: $x + y \geq 2\sqrt{xy} \Rightarrow 0 < xy \leq \frac{1}{4}$

$$A = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 = x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + 4 \geq 2xy + 2\frac{1}{xy} + 4 = 2\left(xy + \frac{1}{16xy} + \frac{15}{16xy}\right) + 4$$

$$\Rightarrow A \geq 2\left(2\sqrt{xy \cdot \frac{1}{16xy}} + \frac{15}{16xy}\right) + 4 = 2\left(2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{15}{16 \cdot \frac{1}{4}}\right) + 4 = \frac{25}{2}$$

Vậy $A_{\min} = \frac{25}{2}$ khi $x = y = \frac{1}{2}$

HẾT