

Bài 1 (2,0 điểm) Cho hai biểu thức $A = \frac{1}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}+11}{x-9}$ và $B = \frac{\sqrt{x}-3}{2}$ với $x \geq 0, x \neq 9$

Tính giá trị của biểu thức B khi $x = \frac{9}{16}$

- 1) Rút gọn biểu thức $M = A.B$
- 2) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức M

Bài 2 (2,0 điểm) *Giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình:*

Hai vòi nước cùng chảy vào một bể không có nước thì sau 12 giờ sẽ đầy bể. Nếu mở vòi I chảy trong 4 giờ rồi khóa lại và mở tiếp vòi II chảy trong 3 giờ thì được $\frac{3}{10}$ bể. Hỏi nếu mỗi vòi chảy một mình thì sau bao lâu sẽ đầy bể?

Bài 3 (2,0 điểm).

- 1) Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + my = 2 \\ 2x + 4y = 3 \end{cases}$$
 - a) Giải hệ phương trình khi $m = 3$
 - b) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn điều kiện x và y là hai số đối nhau.
- 2) Cho hàm số $y = -x^2$ có đồ thị là parabol (P) và hàm số $y = x - 2$ có đồ thị là đường thẳng (d). Gọi A và B là giao điểm của (d) với (P). Tính diện tích tam giác OAB.

Bài 4 (3,5 điểm). Cho nửa đường tròn (O), đường kính AB và K là điểm chính giữa cung AB. Trên cung KB lấy một điểm M (khác K, B). Trên tia AM lấy điểm N sao cho $AN = BM$. Kẻ dây BP // KM. Gọi Q là giao điểm của các đường thẳng AP và BM; E là giao điểm của PB và AM.

- 1) Chứng minh rằng: Tứ giác PQME nội tiếp đường tròn
- 2) Chứng minh: $\triangle AKN = \triangle BKM$
- 3) Chứng minh: $AM.BE = AN.AQ$
- 4) Gọi R, S lần lượt là giao điểm thứ hai của QA, QB với đường tròn ngoại tiếp tam giác OMP. Chứng minh rằng khi M di động trên cung KB thì trung điểm I của RS luôn nằm trên một đường cố định

Bài 5 (0,5 điểm) Cho $x > 0$, tìm GTNN của biểu thức $A = x^2 + 3x + \frac{1}{x}$

HƯỚNG DẪN

Bài 1 (2,0 điểm) Cho hai biểu thức $A = \frac{1}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}+11}{x-9}$ và $B = \frac{\sqrt{x}-3}{2}$ với $x \geq 0, x \neq 9$

- 1) Tính giá trị của biểu thức B khi $x = \frac{9}{16}$
- 2) Rút gọn biểu thức $M = A.B$
- 3) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức M

Hướng dẫn

- 1) Thay (thỏa mãn điều kiện) vào B ta được: $B = \frac{\sqrt{\frac{9}{16}}-3}{2} = \frac{\frac{3}{4}-3}{2} = \frac{3-12}{2} = \frac{-9}{2}$
- 2) Ta có:

$$\begin{aligned} M = A.B &= \left(\frac{1}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}+11}{x-9} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}-3}{2} \\ &= \left(\frac{\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} + \frac{\sqrt{x}+11}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}-3}{2} = \frac{2\sqrt{x}+14}{(\sqrt{x}+3).2} = \frac{\sqrt{x}+7}{\sqrt{x}+3} \end{aligned}$$

$$3) M = \frac{\sqrt{x}+7}{\sqrt{x}+3} = 1 + \frac{4}{\sqrt{x}+3}$$

$$\text{Vì } \sqrt{x} \geq 0 \text{ nên } \sqrt{x}+3 \geq 3 \text{ suy ra } \frac{4}{\sqrt{x}+3} \leq \frac{4}{3} \Leftrightarrow 1 + \frac{4}{\sqrt{x}+3} \leq 1 + \frac{4}{3} \Leftrightarrow M \leq \frac{7}{3}$$

$$\text{Vậy } \text{Max} M = \frac{7}{3} \Leftrightarrow x = 0$$

Bài 2 (2,0 điểm) Giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình:

Hai vòi nước cùng chảy vào một bể không có nước thì sau 12 giờ sẽ đầy bể. Nếu mở vòi I chảy trong 4 giờ rồi khóa lại và mở tiếp vòi II chảy trong 3 giờ thì được $\frac{3}{10}$ bể. Hỏi nếu mỗi vòi chảy một mình thì sau bao lâu sẽ đầy bể?

Hướng dẫn

Gọi x và y là thời gian vòi I và vòi II chảy một mình đầy bể là $(x, y > 12)$, giờ 1 giờ vòi I chảy được: $\frac{1}{x}$ (bể); 1 giờ vòi II chảy được: $\frac{1}{y}$ (bể), 1 giờ cả 2 vòi chảy được: $\frac{1}{12}$ (bể)

Theo đề bài ta có phương trình: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12}$

4 giờ vòi I chảy được $\frac{4}{x}$ (bể); 3 giờ vòi II chảy được $\frac{3}{y}$ (bể) nên ta có: $\frac{4}{x} + \frac{3}{y} = \frac{3}{10}$

Ta có hệ:
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12} \\ \frac{4}{x} + \frac{3}{y} = \frac{3}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3}{x} - \frac{3}{y} = \frac{-1}{4} \\ \frac{4}{x} + \frac{3}{y} = \frac{3}{10} \end{cases} \quad (1)$$

(1) + (2) ta được: $\frac{1}{x} = \frac{-1}{4} + \frac{3}{10} = \frac{1}{20}$ nên $\frac{1}{y} = \frac{1}{12} - \frac{1}{20} = \frac{1}{30}$ nên $x = 20; y = 30$

Vậy: Vòi I chảy một mình đầy bể là 20 (giờ), vòi II chảy một đầy bể là 30 (giờ)

Bài 3 (2,0 điểm).

- 1) Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + my = 2 \\ 2x + 4y = 3 \end{cases}$$
- c) Giải hệ phương trình khi $m = 3$
- d) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện x và y là hai số đối nhau.
- 2) Cho hàm số $y = -x^2$ có đồ thị là parabol (P) và hàm số $y = x - 2$ có đồ thị là đường thẳng (d). Gọi A và B là giao điểm của (d) với (P). Tính diện tích tam giác OAB.

Hướng dẫn

1)

a) Thay $m = 3$ vào hệ ta được:

$$\begin{cases} x + 3y = 2 \\ 2x + 4y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 6y = -4 \\ 2x + 4y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x = -1 \\ x + 3y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Nên hệ có nghiệm $(1, 2)$

b)
$$\begin{cases} x + my = 2 \\ 2x + 4y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2my = 4 \\ 2x + 4y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m - 4)y = 1 \\ x + my = 2 \end{cases}$$

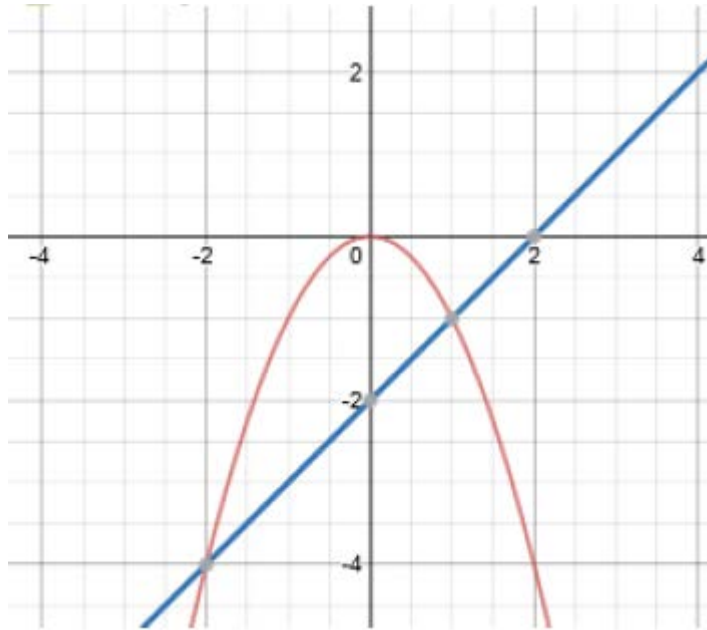
Để hệ có nghiệm duy nhất thì $2m - 4 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$ (1) khi đó hệ phương trình có nghiệm:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2m-4} \\ x = 2 - \frac{m}{2m-4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3m-8}{2m-4} \\ y = \frac{1}{2m-4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m-4)y = 1 \\ x + my = 2 \end{cases}$$

x và y là hai số đối nhau nên
$$\begin{cases} y = \frac{1}{2m-4} \\ x = 2 - \frac{m}{2m-4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3m-8}{2m-4} \\ y = \frac{1}{2m-4} \end{cases} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $m = \frac{7}{3}$

2)



PT hoành độ giao điểm của (P) và (d):

$$-x^2 = x - 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \Rightarrow y_1 = -1 \\ x_2 = -2 \Rightarrow y_2 = -4 \end{cases} \text{ (do } a + b + c = 0 \text{)}$$

Nên $A(-2; -4), B(1; -1)$

Gọi C giao điểm của (d) và trục Oy, ta có $C(0; -2)$

$$S_{AOB} = S_{OBC} + S_{AOC} = \frac{BH \cdot OC}{2} + \frac{AK \cdot OC}{2} = \frac{|x_B| \cdot |-2|}{2}$$

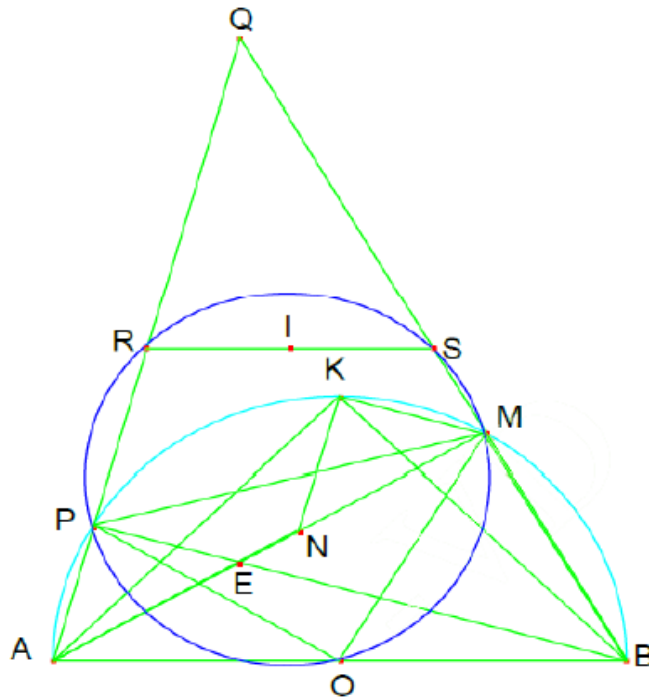
$$S_{AOB} = \frac{|1| \cdot |-2|}{2} + \frac{|-2| \cdot |-2|}{2} = 3$$

Bài 4 (3,5 điểm). Cho nửa đường tròn (O), đường kính AB và K là điểm chính giữa cung AB. Trên cung KB lấy một điểm M (khác K, B). Trên tia AM lấy điểm N sao cho $AN = BM$. Kẻ dây BP // KM. Gọi Q là giao điểm của các đường thẳng AP và BM; E là giao điểm của PB và AM.

- 1) Chứng minh rằng: Tứ giác PQME nội tiếp đường tròn
- 2) Chứng minh: $\triangle AKN = \triangle BKM$
- 3) Chứng minh: $AM \cdot BE = AN \cdot AQ$

- 4) Gọi R, S lần lượt là giao điểm thứ hai của QA, QB với đường tròn ngoại tiếp tam giác OMP. Chứng minh rằng khi M di động trên cung KB thì trung điểm I của RS luôn nằm trên một đường cố định.

Hướng dẫn



1) Chứng minh rằng: Tứ giác PQME nội tiếp đường tròn

Xét (O), đường kính AB có:

$$\angle APB = 90^\circ, \angle AMB = 90^\circ \text{ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)}$$

Nên $\angle QPB = 90^\circ; \angle QMA = 90^\circ$ (kề bù)

Suy ra: $\angle QPE + \angle QME = 180^\circ$ nên tứ giác PQME nội tiếp đường tròn

2) Chứng minh: $\triangle AKN = \triangle BKM$

K là điểm chính giữa cung AB nên $sd KA = sd KB \Rightarrow AK = KB$ (liên hệ giữa cung và dây)

Xét $\triangle AKN$ và $\triangle BKM$ ta có:

$$AK = KB \text{ (chứng minh trên);}$$

$$\angle KAN = \angle KBM \text{ (chắn cung KM);}$$

$$AN = BM \text{ (gt)}$$

Nên $\triangle AKN = \triangle BKM$

3) Chứng minh: $AM \cdot BE = AN \cdot AQ$

$$\triangle AMQ \sim \triangle BME \text{ (g - g)}$$

$$\text{Suy ra: } \frac{AM}{BM} = \frac{AQ}{EB}$$

mà $AN = BM$ (gt) nên $AM \cdot BE = AN \cdot AQ$

- 4) Gọi R, S lần lượt là giao điểm thứ hai của QA, QB với đường tròn ngoại tiếp tam giác OMP. Chứng minh rằng khi M di động trên cung KB thì trung điểm I của RS luôn nằm trên một đường cố định.

$\triangle OPM$ vuông cân tại O nên $\angle POM = 90^\circ$

$\triangle PQB$ vuông cân nên $\angle Q = 45^\circ$

Mà $\angle OSB = \angle OPM = 45^\circ \Rightarrow \angle Q = \angle OSB = 45^\circ \Rightarrow SO \parallel QA$ hay $SO \parallel AR$ (1)

Ta có: $\angle QRS = \angle SMP$ (tứ tiếp PRSM nội tiếp)

$\Rightarrow \angle QRS = \angle QAB \Rightarrow RS \parallel AB$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: tứ giác ARSO là hình bình hành.

Lấy điểm I, C, D lần lượt là trung điểm của RS, AO và OB như vậy C, D là các điểm cố định.

Chứng minh dễ dàng các tứ giác ARIC, BSID là các hình bình hành

$\Rightarrow \angle AQB = \angle CID = 45^\circ$ I luôn nhìn CD cố định dưới góc $45^\circ \Rightarrow I$ nằm trên cung chứa góc 45° vẽ trên đoạn CD cố định. Vậy điểm I nằm trên cung tròn cố định (đpcm)

Bài 5 (0,5 điểm) Cho $x > 0$, tìm GTNN của biểu thức $A = x^2 + 3x + \frac{1}{x}$

Hướng dẫn

Ta có: $A = x^2 + 3x + \frac{1}{x} = \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + \left(4x + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(4x + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{4}$

Ta thấy: $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$, dấu “=” xảy ra khi $x = \frac{1}{2}$

Áp dụng bất đẳng thức Cô – si cho hai số dương: $4x + \frac{1}{x} \geq 4$

Dấu “=” xảy ra khi $4x = \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$. Nên $A \geq \frac{15}{4}$, dấu “=” xảy ra khi $x = \frac{1}{2}$

Vậy: $\min y = \frac{15}{4}$ khi $x = \frac{1}{2}$

HẾT