

Bài 1: (2 điểm). Rút gọn các biểu thức sau

a) $16\sqrt{\frac{1}{2}} - 3\sqrt{8} - 2(\sqrt{2} - 1)^2$

b) $\frac{1}{2 - \sqrt{3}} + \frac{2 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} - \sqrt{(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2}$

c) $\sqrt[3]{-27} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$

d)

$\frac{\sin 25^\circ}{\cos 65^\circ} + \sin^2 35^\circ - (2023 - \cos^2 35^\circ).$

Bài 2: (1,5 điểm). Tìm x biết

a) $\sqrt{(\sqrt{x} - 3)^2} = 2$

b) $2\sqrt{4x - 4} - \frac{1}{3}\sqrt{9x - 9} - 6 = 0.$

Bài 3: (2,5 điểm). Cho hai biểu thức

$$A = \frac{1}{x + 2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x} + 2} \text{ và } B = \frac{1 - \sqrt{x}}{x + 4\sqrt{x} + 4} \quad (x > 0; x \neq 1)$$

a) Tính giá trị của B tại $x = 4$.

b) Đặt $P = A : B$, rút gọn P .

c) Tìm x để $P > 2$.

d) Tìm giá trị nhỏ nhất của $P + \sqrt{x}$.

Bài 4: (1 điểm). Ở một thời điểm trong ngày, một cột cờ cao 11m có bóng trên mặt đất dài 6m. Hỏi góc giữa tia sáng mặt trời và bóng cột cờ là bao nhiêu? (làm tròn đến phút).

Bài 5: (2,5 điểm). Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 9\text{cm}$, $BC = 12\text{cm}$. Kẻ AH vuông góc với BD tại H .

a) Tính BD, AH và số đo góc ABD ?

b) Kẻ HI vuông góc với AB . Chứng minh $AI \cdot AB = DH \cdot HB$.

c) Đường thẳng AH cắt BC tại M và cắt DC tại N . Chứng minh $HA^2 = HM \cdot HN$.

(Làm tròn kết quả độ dài đến chữ số thập phân thứ 3, số đo góc đến độ)

Bài 6: (0,5 điểm). Tìm x, y thỏa mãn phương trình $\frac{36}{\sqrt{x-2}} + \frac{4}{\sqrt{y-1}} = 28 - 4\sqrt{x-2} - \sqrt{y-1}$.

❧HẾT❧

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. a) $16\sqrt{\frac{1}{2}} - 3\sqrt{8} - 2(\sqrt{2} - 1)^2$

$$= 16\frac{\sqrt{2}}{2} - 3.2\sqrt{2} - 2(2 - 2\sqrt{2} + 1)$$
$$= 8\sqrt{2} - 6\sqrt{2} - 6 + 4\sqrt{2}$$
$$= 6\sqrt{2} - 6.$$

b) $\frac{1}{2 - \sqrt{3}} + \frac{2 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} - \sqrt{(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2}$

$$= \frac{2 + \sqrt{3}}{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} + \frac{\sqrt{2}(1 + \sqrt{2})}{1 + \sqrt{2}} - |\sqrt{2} - \sqrt{3}|$$
$$= 2 + \sqrt{3} + \sqrt{2} - (\sqrt{3} - \sqrt{2})$$
$$= 2 + 2\sqrt{2}.$$

c) $\sqrt[3]{-27} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$

$$= -3 + \sqrt{2.8}$$
$$= -3 + \sqrt{16}$$
$$= -3 + 4$$
$$= 1.$$

d) $\frac{\sin 25^\circ}{\cos 65^\circ} + \sin^2 35^\circ - (2023 - \cos^2 35^\circ)$

$$= \frac{\sin 25^\circ}{\sin 25^\circ} + \sin^2 35^\circ - 2023 + \cos^2 35^\circ$$
$$= 1 + 1 - 2023 = -2021.$$

Câu 2. a) $\sqrt{(\sqrt{x} - 3)^2} = 2$ Điều kiện: $x \geq 0$.

$$\sqrt{(\sqrt{x} - 3)^2} = 2$$
$$\Leftrightarrow |\sqrt{x} - 3| = 2$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} - 3 = 2 \\ \sqrt{x} - 3 = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 5 \\ \sqrt{x} = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 25 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Vậy $x = 25; x = 1$.

$$b) 2\sqrt{4x-4} - \frac{1}{3}\sqrt{9x-9} - 6 = 0$$

Điều kiện: $x \geq 1$

$$2\sqrt{4x-4} - \frac{1}{3}\sqrt{9x-9} - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{4(x-1)} - \frac{1}{3}\sqrt{9(x-1)} = 6$$

$$\Leftrightarrow 2.2\sqrt{x-1} - \frac{1}{3}.3.\sqrt{x-1} = 6$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{x-1} - \sqrt{x-1} = 6$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{x-1} = 6$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 2$$

$$\Leftrightarrow x-1 = 4$$

$$\Leftrightarrow x = 5(TM)$$

Vậy $x = 5$.

Câu 3. a) Thay $x = 4$ (thỏa mãn) vào B ta được

$$B = \frac{1-\sqrt{4}}{4+4\sqrt{4}+4} = \frac{1-2}{4+4.2+4} = \frac{-1}{16}$$

$$\text{Vậy } x = 4 \text{ thì } B = \frac{-1}{16}$$

b) Rút gọn $P = A : B$

$$P = A : B = \left(\frac{1}{x+2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}+2} \right) : \frac{1-\sqrt{x}}{x+4\sqrt{x}+4} \quad (x > 0; x \neq 1)$$

$$P = \left(\frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \right) : \frac{1-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+2)^2}$$

$$P = \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \cdot \frac{(\sqrt{x}+2)^2}{1-\sqrt{x}}$$

$$P = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}.$$

c) Tính các giá trị của x để $P > 2$.

$$P > 2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} > 2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} - 2 > 0 \Leftrightarrow \frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} > 0 \quad (x > 0; x \neq 1)$$

Theo ĐK ta có $x > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} > 0$

$$\frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} > 0 \Leftrightarrow 2-\sqrt{x} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 2 \Leftrightarrow x < 4. \text{ Kết hợp với điều kiện ta được}$$

$$0 < x < 4, x \neq 1.$$

d) Tìm giá trị nhỏ nhất của $P + \sqrt{x}$

$$P + \sqrt{x} = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} = 1 + \frac{2}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} \quad (x > 0; x \neq 1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương ta có

$$P + \sqrt{x} = 1 + \frac{2}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} \geq 1 + 2\sqrt{\frac{2}{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x}} = 1 + 2\sqrt{2}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra } \sqrt{x} = \frac{2}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x = 2 \text{ (thỏa mãn).}$$

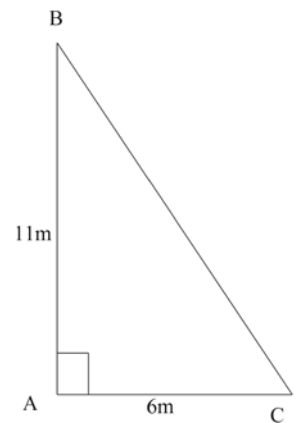
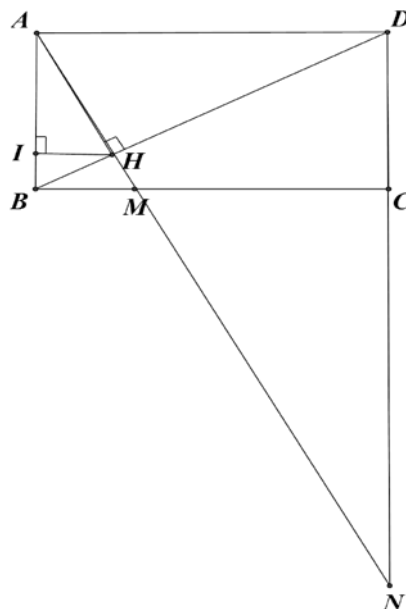
$$\text{Vậy } \min(P + \sqrt{x}) = 1 + 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x = 2.$$

Câu 4. Giả sử AB là cột cờ, AC là bóng cột cờ. $\widehat{ACB}$ là góc giữa tia sáng mặt trời và bóng cột cờ

Xét tam giác ABC vuông tại A có

$$\tan \widehat{ACB} = \frac{AB}{AC} = \frac{11}{6} \Rightarrow \widehat{ACB} = 61^\circ 23'.$$

Câu 5.



a) Áp dụng định lý Py-ta-go trong tam giác vuông ABD .

$$BD^2 = AD^2 + AB^2 = 12^2 + 9^2 \Rightarrow BD = 15 \text{ cm}.$$

Áp dụng heeh thức lượng trong tam giác vuông ABD .

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} \Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{9^2} + \frac{1}{12^2} \Rightarrow AH = \frac{36}{5}.$$

$$\text{Ta có } \sin ABD = \frac{AH}{AB} \Rightarrow \sin ABD = \frac{4}{5} \Rightarrow \widehat{ABD} = 53^\circ.$$

b) Trong tam giác vuông AHB có $AH^2 = AI \cdot AB$.

Trong tam giác vuông ABD có $AH^2 = BH \cdot HD$.

$$\Rightarrow AI \cdot AB = BH \cdot DH.$$

c) Trong tam giác vuông ADN có $DH^2 = AH \cdot HN$.

Trong tam giác vuông ABM có $BH^2 = AH \cdot HM$.

Trong tam giác vuông ABD có $AH^2 = BH \cdot HD$.

$$DH^2 \cdot BH^2 = AH^2 \cdot HN \cdot HM$$

$$\Rightarrow (DH \cdot BH)^2 = AH^2 \cdot HN \cdot HM$$

$$\Rightarrow AH^4 = AH^2 \cdot HN \cdot HM.$$

$$\Rightarrow AH^2 = HN \cdot HM.$$

Câu 6.

$$\text{ĐKXD: } \begin{cases} x-2 > 0 \\ y-1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 2 \\ y > 1 \end{cases}$$

$$\frac{36}{\sqrt{x-2}} + \frac{4}{\sqrt{y-1}} = 28 - 4\sqrt{x-2} - \sqrt{y-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{36}{\sqrt{x-2}} + 4\sqrt{x-2} + \frac{4}{\sqrt{y-1}} + \sqrt{y-1} = 28$$

Áp dụng bất đẳng thức cô si:

$$\frac{36}{\sqrt{x-2}} + 4\sqrt{x-2} \geq 2\sqrt{\frac{36}{\sqrt{x-2}} \cdot 4\sqrt{x-2}} = 2\sqrt{36 \cdot 4} = 24$$

$$\frac{4}{\sqrt{y-1}} + \sqrt{y-1} \geq 2\sqrt{\frac{4}{\sqrt{y-1}} \cdot \sqrt{y-1}} = 2\sqrt{4} = 4.$$

Do đó:

$$\frac{36}{\sqrt{x-2}} + 4\sqrt{x-2} + \frac{4}{\sqrt{y-1}} + \sqrt{y-1} \geq 24 + 4 = 28$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} \frac{36}{\sqrt{x-2}} = 4\sqrt{x-2} \\ \frac{4}{\sqrt{y-1}} = \sqrt{y-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(x-2) = 36 \\ y-1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 11 \\ y = 5 \end{cases}.$$

Đổi chiều Đk ta thấy x, y đều thỏa mãn.

♣ HẾT ♣